LISTA 1
MM 425 - 1º SEMESTRE 2015

Exercícios que devem ser entregues até o dia 25 de Março: 5, 6, 11, 12, 14, 16 e os exercícios 1.5, 1.13, 1.14 e 2.4 do livro do Brezis.

(1) Prove que em qualquer espaço de dimensão finita todas as normas são equivalentes.
(2) Prove que todo espaço de dimensão finita é completo.
(3) Prove que em qualquer espaço vetorial de dimensão finita todos funcionais lineares são limitados.
(4) Seja X um espaço vetorial normado. Prove que o espaço vetorial das funções contínuas e limitadas, $\mathcal{C}_b(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f$ é contínua e limitada$\}$, munido da norma $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$ é um espaço de Banach.
(5) Considere os seguintes espaços:

$$c(\mathbb{N}) = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ e existe o limite de } x_n \text{ quando } n \to \infty\};$$

$$c_0(\mathbb{N}) = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ e } \lim_{n\to\infty} x_n = 0\};$$

$$c_{00}(\mathbb{N}) = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ e } x_n = 0 \text{ exceto para um número finito de valores de } n \in \mathbb{N}\}.$$

Observe que $c_{00} \subset c_0 \subset c$ e $c_{00} \subset l_p$ para todo $1 \le p \le \infty$. Prove que
(a) c e c_0 são subespaços fechados de l_∞ (portanto de Banach);
(b) $\forall p, 1 \le p \le \infty$, $\|\cdot\|_{l_p}$ é norma em c_{00} mas $(c_{00}, \|\cdot\|_{l_p})$ não é completo;
(c) o completamento de $(c_{00}, \|\cdot\|_{l_p})$ é isometricamente isomorfo a l_p para qualquer $1 \le p < \infty$;
(d) o completamento de $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ é isometricamente isomorfo a c_0.

(6) Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado de dimensão infinita.
(a) Construa um operador linear $T : X \to X$ injetivo e não limitado.
(b) Defina a função $\|\cdot\|_1 : X \to \mathbb{R}$, por $\|x\|_1 = \|Tx\|$, $\forall x \in X$. Prove que $\|\cdot\|_1$ é uma norma, $T : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|)$ é um isomorfismo isométrico e que $(X, \|\cdot\|_1)$ é Banach se e somente se $(X, \|\cdot\|)$ é Banach.

(7) Considere o espaço de Banach $(\mathcal{C}([a,b], \|\cdot\|_\infty)$. Para cada $f \in \mathcal{C}([a,b])$ fixo defina o funcional $I_f : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathbb{R}$ por:

$$I_f(g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Prove que I_f é um funcional linear limitado e calcule $\|I_f\|$.

(8) Seja X um espaço vetorial real e $p : X \to \mathbb{R}$ um funcional sublinear. Mostre que existe um funcional linear $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $-p(-x) \leq f(x) \leq p(x)$.

(9) Demonstre a forma complexa do Teorema de Hahn-Banach:

"Sejam X um espaço vetorial complexo e M um subespaço de X. Seja $p : X \to \mathbb{R}$ uma semi-norma, ou seja, p satisfaz as seguintes condições

(a) $p(x) \geq 0$, para todo $x \in X$;
(b) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, para todo $x, y \in X$;
(c) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, para todo $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

Considere um funcional linear f em M tal que $|f(x)| \leq p(x)$, para todo $x \in M$. Então existe um funcional linear F em X, que estende f e tal que $|F(x)| \leq p(x)$, para todo $x \in X$."

Dica: Observe que X também pode ser visto como um espaço vetorial real e escreva $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$. Prove que f_1 e f_2 são funcionais lineares reais. Aplique o Teorema de Hahn-Banach para f_1 e f_2 para obter extensões F_1 e F_2 e depois use que $f_1(ix) = -f_2(x)$ para mostrar que $F = F_1 + iF_2$ é a extensão de f procurada.

(10) Seja X um espaço vetorial e $\|\cdot\|$ uma semi-norma em X (veja a definição no exercício anterior). Defina $M = \{x \in X : \|x\| = 0\}$. Prove que M é um subespaço de X e que a aplicação $x + M \mapsto \|x\|$ é uma norma em X/M.

(11) Sejam M e N subespaços fechados de um espaço vetorial normado X. Usando o Teorema de Hahn-Banach, prove que se $M \neq N$ então $M^\perp \neq N^\perp$.

(12) Seja X um espaço vetorial normado e M um subespaço de X. Defina $L = \{f \in X^* : f \equiv 0 \text{ em } M\}$. Prove que M^* é isometricamente isomorfo a X^*/L.

(13) Sejam X e Y espaços vetoriais normados e suponha que $X \neq \{0\}$. Prove que se $B(X,Y)$ é completo então Y deve ser completo.

(14) Sejam X e Y espaços de Banach. Seja $\{T_n\}$ uma sequência de operadores lineares limitados de X para Y tal que $T_n x \to Tx$ em Y para cada $x \in X$. Prove que T é um operador linear limitado.

(15) Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $T \in B(X, Y)$. Mostre que T pode ser estendido unicamente a um operador $S \in B(\bar{X}, \bar{Y})$ tal que $\|T\| = \|S\|$, onde $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ são os completamentos de X e Y respectivamente.

(16) Prove que o Princípio da Limitação Uniforme não é válido se a hipótese sobre o domínio dos operadores ser um espaço completo for retirada.

(17) Sejam X um espaço de Banach, M um subespaço próprio de X e $T : M \to l_\infty$ uma aplicação linear contínua. Prove que existe uma aplicação linear contínua $S : X \to l_\infty$ que estende T e tal que $\|S\| = \|T\|$.

(18) Resolva os exercícios 1.1,1.2,1.3,1.4,1.5, 1.6, 1.13, 1.14, 2.3, 2.4, 2.5, 2.9 e 2.18 do livro do Brezis.