$$\int x\cos x\,dx = x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x + C\,.$$

Problema 9.10.4. Encontrar

$$I = \int \mathrm{sen}^2\,\alpha\,d\alpha\,.$$

Solução: Identificamos

$$f(\alpha) = \mathrm{sen}\,\alpha\,, \qquad g'(\alpha) = \mathrm{sen}\,\alpha\,,$$

das quais concluímos que

$$f'(\alpha) = \cos\alpha\,, \qquad g(\alpha) = -\cos\alpha\,.$$

A Eq. (9.10.3) dá

$$\begin{aligned} I &= \mathrm{sen}\,\alpha(-\cos\alpha) - \int \cos\alpha(-\cos\alpha)\,d\alpha \\ &= -\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + \int \cos^2\alpha\,d\alpha\,. \end{aligned}$$

A integração no segundo membro traz mais problemas do que a no primeiro membro. Entretanto, usando $\cos^2\,\alpha = 1 - \mathrm{sen}^2\,\alpha$, temos

$$\int \cos^2\alpha\,d\alpha = \int (1 - \mathrm{sen}^2\,\alpha)\,d\alpha = \alpha - I + C$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} I &= -\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + \alpha - I + C\,, \\ 2I &= -\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + \alpha + C\,, \\ I &= \tfrac{1}{2}(-\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + \alpha + C)\,. \end{aligned}$$

Existem muitas outras técnicas de integração que o leitor pode encontrar em livros de cálculo. Questionamos se um naturalista deve dispensar muito tempo em tais técnicas somente para aprender que existem muitas integrais aparentemente fáceis e que não podem ser trabalhadas de uma forma fechada. Um exemplo de tal integral é

$$\int \frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\,dx\,.$$

Existem também *tabelas* nas quais o leitor pode encontrar integrais bastante sofisticadas e suas soluções. Ver Dwight (1961), Gradštejn e Ryžik (1965), Gröbner e Hofreiter (1965, 1966), Meredith (1967), Peirce (1929).

Recomendados para leitura posterior: Defares *et al*. (1973), Gelbaum e March (1969), Guelfi (1966), Lefort (1967), McBrien (1961), C. A. B. Smith (1966), Stibitz (1966).

Problemas

9.1.1. Um grupo de turistas iniciou uma excursão de 45 km às 10 : 00. O grupo alcançou um abrigo a 31 km de distância do ponto de partida, às 17 :30. Ali eles passaram a noite. Na manhã seguinte, às 8 : 00, o grupo continuou a caminhar e chegou ao seu objetivo às 11 : 00. A velocidade média do segundo dia é maior ou menor do que a do primeiro dia?

9.1.2. Certa massa é distribuída ao longo do eixo x (com unidade 1 cm). Seja $M = M(x)$ a massa total entre a origem e o ponto de abcissa x. Para $x_1 = 4$ cm, $x_2 = 7$ cm, $x_3 = 9$ cm, os seguintes valores são obtidos: $M(x_1) = 83$ g, $M(x_2) = 141$ g, $M(x_3) = 179$ g. A densidade média no intervalo $[0, x]$ aumenta ou diminui quando x aumenta?

9.1.3. Suponhamos que uma população de 25 000 indivíduos (no instante $t = 0$) cresce de acordo com a fórmula $N = 25\,000 + 45\,t^2$, onde o tempo t é medido em dias. Encontrar a taxa média de crescimento nos seguintes intervalos de tempo: a) de $t = 0$ a $t = 2$; b) de $t = 2$ a $t = 10$; c) de $t = 0$ a $t = 10$.

9.1.4. Suponhamos que uma proteína (massa M em gramas) se decomponha em aminoácidos, de acordo com a fórmula $M = 28/(t + 2)$, onde o tempo t é medido em horas. Encontrar a taxa média de reação para os seguintes intervalos de tempo: a) de $t = 0$ a $t = 2$; b) $t = 0$ a $t = 1$; c) de $t = 0$ a $t = 1/2$.

9.1.5. Certa massa é distribuída ao longo do eixo x continuamente. A unidade de comprimento é 1 cm e a de massa 1 g. $M(x)$ representa a massa que cai no intervalo $[0, x]$. É dado $M(x) = x^2/3$. Encontrar a densidade média nos intervalos $[10, 10 + h]$, onde h toma os valores de 1 cm, 0,1 cm, e 0,01 cm, respectivamente.

9.1.6. Suponhamos que uma partícula mova-se do ponto $s = 2$ (metros) no tempo $t = 1$ (s) até os pontos com $s > 2$ ao longo de um eixo s. O segmento s (metros) é a seguinte função do tempo t (s): $s = 2\sqrt{t}$. Encontrar a velocidade média da partícula no intervalo de tempo de $t = 1$ a $t = 1 + h$, onde h assume os valores decrescentes 1, 0,1, 0,01, 0,001 (s).

9.2.1. Calcular o quociente de diferenças e a derivada da função $y = ax^2 + b$.

9.2.2. Calcular o quociente de diferenças e a derivada da função $y = x^3$.

9.2.3. Usando a fórmula geral para a derivação da função $y = x^n$, encontrar as derivadas das seguintes funções-potência:

a) $y = x^{-2}$, b) $u = w^5$, c) $V = r^{2/3}$,
d) $M = 1/t^3$, e) $A = \sqrt[3]{Q}$, f) $Z = 1/\sqrt{P}$.

9.2.4. Usar a fórmula para $(x^n)'$ para encontrar as derivadas de

a) $y = x^{-3}$, b) $Q = u^{10}$, c) $Z = 1/v^4$,
d) $s = \sqrt[4]{Q}$, e) $\lambda = \sqrt{t^3}$, f) $x = 1/\sqrt[3]{t}$.

9.2.5. Calcular as derivadas de

a) $v = at + b/t + c$, b) $U = az^2 + b\sqrt{z} + c/\sqrt{z}$ (a, b, c são constantes).

9.2.6. Calcular as derivadas de

a) $U(t) = pt^{3/4} - qt^{-2}$, b) $S(t) = \dfrac{3p}{t} - \dfrac{q}{t^3}$,

c) $T(u) = au - b/u^2$, d) $h(x) = \dfrac{ax+b}{x^2}$.

9.2.7. O tamanho de uma cultura de bactérias que cresce lentamente é dado aproximadamente por

$$N = N_0 + 52\,t + 2\,t^2 \qquad \text{(tempo } t \text{ em horas).}$$

Calcular a taxa de crescimento em $t = 5$ h.

9.2.8. Quando a proteína foi sintetizada na célula, a massa M da proteína, como uma função do tempo t, aumentou de acordo com a fórmula

$$M = p + qt + rt^2 \qquad (p, q, r \text{ são constantes})$$

Qual a taxa de reação como uma função de t.

9.2.9. Em um experimento metabólico a massa M de glicose decresce de acordo com a fórmula

$$M = 4{,}5 - (0{,}03)\,t^2 \qquad (t \text{ em horas}),$$

Calcular a taxa de reação: a) em $t = 0$; b) em $t = 2$; c) no intervalo de $t = 0$ a $t = 2$ (média).

9.2.10. A altura de um cone circular reto é de $h = 20$ cm. O raio r da base (em cm) é crescente. A fórmula para o volume é $V = 1/3\,\pi r^2 h$. Calcular a taxa de crescimento do volume.

9.2.11. Determinar a derivada de $y = \cos x$, empregando o método descrito na Seç. 9.2, para a função $y = \operatorname{sen} x$.

9.2.12. Determinar as derivadas de

a) $y = 3\cos x - 2\operatorname{sen} x$, b) $Q(t) = a\cos t + 2\sqrt{t}$,
c) $P(s) = 1 - s - \frac{1}{2}\operatorname{sen} s$, d) $r(\alpha) = 1 - \cos\alpha$.

9.2.13. Usando a regra para derivação de produtos, determinar as derivadas de

a) $y = (x+7)(x-3)$, b) $y = x \cdot \operatorname{sen} x$,
c) $z(t) = (1-t)\cos t$, d) $Q(\alpha) = \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$,
e) $n(x) = x^{1/3}(1-2x)$, f) $f(y) = a \cdot \sqrt{y}\operatorname{sen} y$.

9.2.14. Determinar a derivada de $y = (x^2 + 1)(x - 2)$ de duas formas a) removendo os parênteses; b) usando a regra para derivação de produto.

9.2.15. Calcular

a) $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x \cdot \cos x)$, b) $\dfrac{d}{dt}(2t-3)(t^2+5)$,

c) $\dfrac{d}{du}(u \cdot \cos u)$, d) $\dfrac{d}{dw}(1-w)\sqrt{w}$.

9.2.16. Calcul
os par
9.2.17. Usand
a)
d)
9.2.18. Calcu
a) y
c) $R($
9.2.19. Calcu
a) $u($
c) z
9.2.20. Difer
a) y
c) y
Os re
9.2.21. Difer
a) y
c) $Q($
e) $f($
9.2.22. Calcul
a) $\frac{d}{dt}$
c) $\frac{d}{du}$
9.2.23. Seja
dx/dy
9.2.24. Seja
dx/dy

9.2.16. Calcular a derivada de $y = (2x + 3)^2$ de três maneiras; a) removendo os parênteses; b) pela regra da derivação e c) pela regra de cadeia.

9.2.17. Usando a regra de cadeia, calcular as derivadas das seguintes funções:

a) $y = (x+5)^2$, b) $Y = (u^2 - 3)^2$, c) $s = 1/(t-2)$,

d) $K = 2/(1-v)$, e) $v = (4-3t)^{\frac{1}{2}}$, f) $p = \operatorname{sen}(4\alpha - 5)$.

9.2.18. Calcular as derivadas de

a) $y = \operatorname{sen}(2x-4)$, b) $U(\beta) = p\cos 3\beta$,

c) $R(s) = 1/(as+b)$, d) $z = \sqrt{3x+1}$.

9.2.19. Calcular as derivadas de

a) $u(x) = (x-1)^{-4}$, b) $E(w) = \dfrac{1}{w} + \dfrac{1}{w-1}$,

c) $z = (t-1)^{1/2} + (t+1)^{-1/2}$, d) $f(\alpha) = (\alpha\cos\alpha)^2$.

9.2.20. Diferenciar

a) $y = \dfrac{x}{x-3}$, b) $K = \dfrac{1+r}{1-r}$,

c) $y = 1/\operatorname{sen}\theta$ d) $y = \operatorname{cotg}\theta = \cos\theta/\operatorname{sen}\theta$.

Os resultados de c) e d) são usados nos exemplos no final da Seç. 9.7.

9.2.21. Diferenciar

a) $y = \dfrac{x^3}{1-x}$, b) $S(t) = \dfrac{at+b}{ct+d}$,

c) $Q(\alpha) = \dfrac{1-\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}$, d) $P(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2}$,

e) $f(u) = (pu^3+q)^{1/3}$, f) $h(\phi) = \operatorname{sen}2\phi/\cos 3\phi$.

9.2.22. Calcular

a) $\dfrac{d}{dt}(2t-3)\sqrt{at}$, b) $\dfrac{d}{dz}\dfrac{1-uz}{1-z}$,

c) $\dfrac{d}{du}\dfrac{1-uz}{1-z}$, d) $\dfrac{d}{d\lambda}(\lambda\operatorname{sen}a\lambda)^3$.

9.2.23. Seja $y = x^2 + 1$. Calcular dy/dx e, da função inversa, dx/dy. Verificar $dx/dy = (dy/dx)^{-1}$.

9.2.24. Seja $y = x^{3/2}$, para $x > 0$. Usando a função inversa, verificar a fórmula $dx/dy = (dy/dx)^{-1}$.

9.3.1. Calcular as antiderivadas das seguintes funções:

a) $y' = 6x^2$, b) $y' = 8x - 7$, c) $u' = at + b$ (a, b são constantes),

d) $\dfrac{dy}{dx} = 5x^3$, e) $\dfrac{dW}{dt} = 2t - 8$, f) $\dfrac{dU}{dx} = U_0 + \cos x$,

g) $y' = \frac{1}{3}\cos t$, h) $U' = \cos 2x$, i) $K' = 1/u^2$.

9.3.2. Calcular as antiderivadas das seguintes funções:

a) $y' = 3x^4 - x^2$, b) $y' = 1 - x^{2/3}$,

c) $\dfrac{dy}{dx} = ax^3 - bx^5$, d) $\dfrac{ds}{dt} = a\sqrt{t}$,

e) $\dfrac{du}{ds} = \dfrac{k}{s^3}$, f) $\dfrac{dQ}{d\alpha} = a\cos\alpha + b\,\mathrm{sen}\,\alpha$,

g) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{pt^2 + q}{t^2}$, h) $\dfrac{dP}{dv} = av^2 + bv + c + \dfrac{d}{v^2}$.

9.5.1. Encontrar um valor aproximado para a integral $\int_1^2 \frac{4}{x}\,dx$ por meio da contagem de pontos (usar 5 intervalos eqüidistantes).

9.5.2. Plotar um gráfico da função $y = 5 + 2x - 1/2x^2$ no intervalo de $x = 0$ a $x = 3$. Encontrar

$$\int_0^3 y\,dx$$

a) aproximadamente pelo método da contagem de pontos; b) exatamente pela integração.

9.5.3. Calcular as integrais definidas

a) $\int_1^2 \dfrac{1}{r^2}\,dr$, b) $\int_{-1}^1 (5 - w)\,dw$, c) $\int_0^t (at^2 + bt + c)\,dt$,

d) $\int_1^3 t\,dt$, e) $\int_{-1}^1 dx$, f) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t\,dt$.

9.5.4. Calcular

a) $\int_0^2 (x^2 + 1)\,dx$, b) $\int_1^2 \dfrac{1}{r^2}\,dr$, c) $\int_{-\beta}^{\beta} \mathrm{sen}\,\alpha\,d\alpha$,

d) $\int_p^q x^2\,dx$, e) $\int_a^{a+1} \dfrac{du}{u^2}$, f) $\int_0^s t^{2/3}\,dt$.

9.5.5. Calcular as seguintes integrais indefinidas

a) $\int x^{-6}\,dx$, b) $\int t^{-1/3}\,dt$, c) $\int (u + 2u^2 + 3u^3)\,du$,

d) $\int s^{0,1}\,ds$, e) $\int (A\,\mathrm{sen}\,\theta + B\cos\theta)\,d\theta$, f) $\int \dfrac{dQ}{\sqrt{8Q^3}}$.

9.5.6. Calcular

a) $\int_0^{10} \frac{du}{(u+2)^2}$, b) $\int_{-p}^{p} A \cdot dr$, c) $\int_1^{3/2} t\,dt$, d) $\int_{-1}^{1} dx$.

9.5.7. Aplicando o Teorema fundamental do cálculo integral, calcular as seguintes derivadas:

a) $\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{t+2}\,dt$, b) $\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{au-1}{u+1}\,du$,

c) $\frac{d}{dt}\int_2^t \frac{u-3}{\operatorname{sen} u}\,du$, d) $\frac{d}{ds}\int_0^s \sqrt{t^3+1}\,dt$.

9.5.8. Se uma mola helicoidal for distendida moderadamente, a lei de Hooke é válida. Ela estabelece que a extensão, s, é proporcional à força de extensão, F, isto é, $F = ks$ ($k > 0$ constante). Seja s medido em metros e F em Newtons. Então, a energia (trabalho) requerida para a extensão é medida em Joules. Encontrar a energia, W, para distender a mola de $s = 0$ a $s = s_0$. (Sugestão: estudar o Ex. 9.4.4).

9.6.1. Calcular as segundas derivadas das seguintes funções:

a) $y = 1 - x^3$, b) $u = 2z^5 - 3z^3$, c) $W = 3/t$, d) $p = 2\sqrt{s}$.

9.6.2. Calcular

a) $\frac{d^2}{dx^2}(ax^3+bx+c)$, b) $\frac{d^2}{dt^2}t^{2/3}$, c) $\frac{d^2}{du^2}\sqrt{u+2}$,

d) $\frac{d^2}{d\alpha^2}\cos(2\alpha+3)$, e) $\frac{d^2}{d\theta^2}(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)$, f) $\frac{d^2}{dr^2}(r-1)^{1/3}$.

9.6.3. Sendo dado que uma partícula está em repouso no instante $t = 0$ e, a partir daí, ela move-se ao longo de uma reta com aceleração constante a, encontrar a "lei do movimento", isto é, encontrar a velocidade v e a distância s percorrida como uma função do tempo.

9.6.4. Mostrar que a primeira derivada de uma função quadrática é linear, e que a segunda derivada é constante. Comparar os resultados com a primeira e segunda diferenças introduzidas na Seç. 4.4.

9.6.5. Por meio das segundas derivadas, determinar se os gráficos das seguintes funções são convexos para cima ou para baixo:

a) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 5$, b) $F = 4 - 2t - t^2$, c) $V = (-1/3)u^2 + u$,
d) $y = 2x - 4$, e) $y = x^3 - x$.

9.6.6. Determinar se os gráficos das seguintes funções têm sentido horário ou anti-horário:

a) $y = 1/x \quad (x > 0)$, b) $y = 1/x^2 \quad (x > 0)$,

c) $y = 1/(1 - x) \quad (0 < x < 1)$, d) $y = \dfrac{x+2}{x-3} \quad (x > 3)$.

9.6.7. Determinar os pontos máximo e mínimo das seguintes funções:

a) $y = x^3 - x$, b) $v = 1 + 2t + \frac{1}{2}t^2$, c) $u = p(1 - p)$.

9.6.8. Determinar os valores extremos de

a) $Z = t^5 - 5t$, b) $U = 1 + s^2 - s^3$, c) $R = \operatorname{sen} 2\alpha$.

9.6.9. A condição "a luz do tráfego está verde" é: a) necessária; b) suficiente para atravessarmos um cruzamento?

9.6.10. Quais são as condições necessárias e suficientes para que uma chamada telefônica alcance seu destino?

9.6.11. Representar os lados de um triângulo por a, b, c. A condição $a^2 + b^2 = c^2$ é necessária e/ou suficiente para que o triângulo seja retângulo?

9.6.12. A condição "a diagonal divide um quadrilátero em dois triângulos congruentes" é necessária e/ou suficiente para um retângulo?

9.6.13. A condição "os quatro lados são iguais" é: a) necessária; b) suficiente para que um quadrilátero seja quadrado?

9.6.14. Verificar a afirmativa "um inteiro é divisível por 6 se, e somente se, for divisível por 2 e por 3".

9.6.15. É dado $y = x^4$. Para $x = 0$, a segunda derivada é zero. O gráfico não possui ponto de inflexão. A condição $f''(x) = 0$ é necessária ou suficiente para um ponto de inflexão?

9.6.16. Suponhamos que o gráfico de uma função $y = f(x)$ consiste de dois arcos que se juntam em um ponto P. Então P é um vértice. A função em P é: a) contínua; b) diferenciável; c) nenhuma das duas; d) ambas? A condição "$f(x)$ é contínua" é necessária ou suficiente para derivação?

9.7.1. Determinar a máxima e a mínima, locais e absolutas, das seguintes funções:

a) $y = x^2 - 3x$ para $0 \leqq x \leqq 5$,

b) $v = 1 + 2t + \frac{1}{2}t^2$ para $-3 \leqq t \leqq 3$,

c) $U = 1/(2v + 3)$ para $1 \leqq v \leqq 3$,

d) $y = x^3 - 3x$ para $-3 \leqq x \leqq 3$.

9.7.2. Determinar os extremos locais e absolutos para

a) $y = 3x^2 - 6x$ para $0 \leqq x \leqq 2$,

b) $z = 1 + u - u^2/2$ para $-2 \leqq u \leqq 2$,

c) $S = 5 - t^{2/3}$ para $0 \leqq t \leqq 8$.

9.7.3. Seja

$$Q(s) = \frac{s^2 - 10s + 5}{s + 1}$$

definido
locais e

9.7.4. Determi

9.7.5. Uma su
do eixo
do em r

(a) Onc

(b) Qua

9.7.6. Na águ
[H_3O^+
(as med

Determ
ex. MA

9.7.7. Em um
substân
formaçã
x do
existent
substân

Encont
Thrall e

9.7.8. Seja Q

minar

9.7.9. Seja v
densida
potênci

Nesta f
tamanh
a potên

9.7.10. A ener
australi
(caloria

definido para o domínio $s \geqslant 0$. Determinar os máximos e os mínimos locais e absolutos.

9.7.4. Determinar os extremos locais e absolutos de $y = 2x/(x^2 + 3)$.

9.7.5. Uma substância é distribuída continuamente no intervalo [0, cm, 10 cm] do eixo x. A concentração é dada pela função $C = 10x - x^2$ (C medido em mg/cm).

(a) Onde está localizada a concentração máxima?

(b) Qual a massa total M?

9.7.6. Na água e em solução, o produto das concentrações de íons hidrônio $[H_3O^+]$, e de íons hidroxila $[OH^-]$ está muito próximo de 10^{-14} (as medidas são feitas em moles). Seja

$$S = [H_3O^+] + [OH^-].$$

Determinar o valor de $[H_3O^+]$ que minimiza S. (De Thrall *et al.*, 1967, ex. MA 7.2) Sugestão: Faça $[H_3O^+] = x$.

9.7.7. Em uma reação de autocatálise uma substância é convertida em uma nova substância, o produto, de tal forma que o produto catalise sua própria formação. Admitimos que a taxa de reação é proporcional à quantidade x do produto no tempo t e também proporcional à quantidade ainda existente da substância original. Se a representa a quantidade original da substância, ela decresce para $a - x$ no tempo t. Portanto,

$$\frac{dx}{dt} = kx(a - x) \quad (k \text{ é uma constante positiva}).$$

Encontrar o valor particular de x que torna máxima a taxa de reação (de Thrall *et al.*, 1967, ex. MA 8.2).

9.7.8. Seja $Q(a) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2$ onde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são medidas dadas. Determinar a de tal forma que $Q(a)$ alcance um mínimo. O resultado é plausível?

9.7.9. Seja v a velocidade de um pássaro relativa ao ar. Seja W seu peso e ϱ a densidade do ar. Pennycuick (1969) encontrou a seguinte fórmula para a potência P que o pássaro tem que manter durante o vôo:

$$P = \frac{W^2}{2\varrho S v} + \frac{1}{2}\varrho A v^3.$$

Nesta fórmula, S e A são certas quantidades relacionadas com a forma e o tamanho do pássaro. Determinar a velocidade particular v_0 que minimiza a potência P.

9.7.10. A energia dispendida por alguns pássaros pode ser medida. Para o periquito australiano (*Melopsittacus undulatus*) a energia dispendida em cal g^{-1} km^{-1} (caloria por grama por quilômetro) pode ser descrita pela fórmula

$$E = \frac{1}{v}\{0{,}074(v - 35)^2 + 22\}$$

onde v é a velocidade do pássaro em km h $^{-1}$ (a velocidade do vento não é considerada). Que velocidade é a mais econômica? (Adaptado de Tucker e Schmidt-Koenig, 1971.)

9.7.11. Em certos tecidos, as células têm a forma de um cilindro circular reto de altura h e raio r. Se o volume for fixo, encontrar o raio particular r que minimiza a superfície total da área. Determinar também a proporção correspondente entre h e r.

9.7.12. Uma pulga saltando na direção vertical alcançou a altura h (em m) como uma função de tempo t (em s):

$$h = (4{,}4)t - (4{,}9)t^2.$$

Calcular a velocidade no tempo $t = 0$, a altura máxima alcançada, e a aceleração causada pela gravidade.

9.8.1. Encontrar os valores médios das seguintes funções

a) $y = \frac{1}{2}x + 3$ sendo $0 \leqq x \leqq 6$,

b) $s = at^2$ sendo $2 \leqq t \leqq 3$,

c) $F = \cos\alpha$ sendo $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$.

9.8.2. Encontrar os valores médios das seguintes funções:

a) $y = 4 - \frac{1}{3}x$ sendo $-2 \leqq x \leqq 2$,

b) $U = 5 + \frac{1}{4}w - \frac{1}{2}w^2$ sendo $0 \leqq w \leqq 3$,

c) $K = r^{-2}$ sendo $1 \leqq r \leqq 3$.

9.9.1. A área da superfície de uma célula esférica é $S = 4\pi r^2$ e o volume $V = 4/3\pi r^3$. Como S e U são afetados por um pequeno aumento δr de r?

9.9.2. Quando um músculo se contrai contra uma força F (p. ex. um peso), a velocidade v de contração decresce à medida que a força aumenta. A. V. Hill descobriu a seguinte equação, em 1938:

$$(F + a)(v + b) = c$$

com constantes positivas apropriadas a, b, c. Expressar v em termos de F. Como v é afetado por uma pequena variação δF de F? (Para a lei de Hill ver Abbott e Brady, 1964, Pág. 349.)

9.9.3. Por inspeção da Fig. 9.28 provar que para $\delta x > 0$

$$(\mathrm{Min}\, f'(x)) \cdot \delta x \leqq \delta y \leqq (\mathrm{Max}\, f'(x)) \cdot \delta x.$$

O mínimo e o máximo de $f'(x)$ são tomados no intervalo de x a $x + \delta x$.

*9.10.5. Integrar

a) $\int \cos$

d) $\int_0^2 (4t$

*9.10.6. Integrar

a) $\int \left(\frac{x}{3}\right.$

d) $\int_3^5 \frac{}{(w}$

*9.10.7. Integrar

a) $\int x\,\mathrm{s}$

*9.10.8. Integrar

a) $\int_0^\pi x\,\mathrm{c}$

*9.10.5. Integrar por substituição

a) $\int \cos\omega x\, dx$, b) $\int (1-8u)^3\, du$, c) $\int \sqrt{p+qs}\, ds \quad (q \neq 0)$,

d) $\int_0^2 (4t+3)^4\, dt$, e) $\int_0^{\pi/2} \cos 3\theta\, d\theta$, f) $\int_1^3 \frac{dx}{(5x-1)^2}$.

*9.10.6. Integrar por substituição

a) $\int \left(\frac{x}{3}-1\right)^5 dx$, b) $\int (a+bv)^{1/3}\, dv$, c) $\int 1/(3-u)^{1/2} du$,

d) $\int_3^5 \frac{dw}{(w-2)^{1/2}}$, e) $\int_0^3 \frac{ds}{(4-s)^3}$, f) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} 2\phi\, d\phi$.

*9.10.7. Integrar por partes

a) $\int x \operatorname{sen} x\, dx$, b) $\int t\cos\omega t\, dt$, c) $\int u(u+1)^{1/2}\, du$.

*9.10.8. Integrar por partes

a) $\int_0^{\pi} x\cos 2x\, dx$, b) $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x\, dx$, c) $\int_0^{1/2} t(1-t)^{-1/2}\, dt$.