Como vemos na tabela, o número de flósculos raiados está sujeito à flutuação ocasional. Entretanto, os valores médios recaem freqüentemente nos números de Fibonacci. As excessões são *Arnica montana* e *Senecio doronicum 2.*

Os biólogos tentaram explicar a predominância peculiar dos números de Fibonacci na filotaxia. A simetria pode desempenhar um papel importante, porque a simetria mantém o equilíbrio mecânico do caule, dá às folhas uma melhor exposição à luz, e mantém um fluxo regular de nutrientes. Entretanto, a ciência ainda está longe de uma explicação satisfatória. Trabalhos importantes sobre filotaxia foram escritos por Thompson (1917, Pág. 912-933) e Nelson (1954, Pág. 48-60). Para comentários, ver também Dormer (1972), Weyl (1952, Pág. 72).

Ocasionalmente, os números de Fibonacci ocorrem em genética de populações. Tratar esta parte da biologia, seria levar este livro muito além do seu objetivo. Recomendamos ao leitor, Li (1958, Págs. 68-70, 118).

Para um tratamento matemático da seqüência de Fibonacci recomendamos Vorobyov (1961). Um livro bastante interessante sobre a seção áurea e os números de Fibonacci foi escrito por Huntley (1970).

Problemas

8.1.1. Determinar os limites dos seguintes termos, quando n tende para infinito

a) $\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(4-\frac{100}{n}\right)$, b) $\left(1-\frac{3}{n}\right)\Big/\left(\frac{1}{n}-3\right)$,

c) $\frac{2n+5}{7n-5}$, d) $\frac{an^2+400\,n}{bn^2-400}$ $(b \neq 0)$.

8.1.2. Para que números convergem os seguintes termos, quando m tende para infinito?

a) $\left(1-\frac{2}{m}-\frac{A}{m^2}\right)\left(1+\frac{B}{m}\right)$, b) $\left(\frac{4}{m}-s\right)\Big/\left(\frac{5}{m^2}-t+1\right)$,

c) $\frac{21-100\,m}{28+10\,m}$, d) $\frac{p-m-m^2}{q+m-m^2}$ $(q \neq 0)$.

8.1.3. Seja $h = 1/n$ e $n \to \infty$. Determinar

a) $\lim_{h\to 0} \frac{4-h}{2+7h}$, b) $\lim_{h\to 0} \frac{4h-h^2}{2h}$,

c) $\lim_{h\to 0} \frac{(h-1)^2-1}{(h+3)^2-9}$, d) $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h}$.

8.1.4. Determinar

a) $\lim_{h\to 0} \frac{2-2(1+h^2)}{-3+3(1-h^2)}$, b) $\lim_{h\to 0} \frac{4-(2+h)^2}{1-(1-h)^2}$,

c) $\lim_{h\to 0} \frac{(3h-1)(3h+1)+1}{(3h-1)(h-2)-2}$, d) $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$.

8.1.5. Determinar o limite de $a_n = n/(n^2+1)^{1/2}$ quando $n \to \infty$. (Sugestão: dividir o numerador e o denominador por n).

8.1.6. Determinar $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2-1}}{3n}$.

8.1.7. Determinar $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5+h}-\sqrt{5}}{h}$.

(Sugestão: multiplicar o numerador e o denominador por $\sqrt{5+h} + \sqrt{5}$).

8.1.8. Seja $x > 0$. Calcular o limite de $\frac{1}{h}(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})$ quando $h \to 0$.

8.1.9. Como se comportam os seguintes termos, quando $n \to \infty$?

a) $100(\frac{1}{2})^n$, b) $(-\frac{1}{2})^n$, c) $(5/4)^n$,

d) $(1+10^{-3})^n$, e) $(1-10^{-3})^n$.

8.1.10. Para estudarmos um problema de procriação consangüínea, Kempthorne (1957, Pág. 86) utiliza a seqüência

$$F_n = \frac{s}{2-s}[1-(s/2)^n] + (s/2)^n F_0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

onde $0 < s < 1$. Determinar o comportamento do limite de F_n quando n tende para infinito.

8.2.1. Calcular a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$, b) $\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}\, h}{a^2 h}$ $(a \neq 0)$.

8.2.2. Calcular $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n$.

(Sugestão: substituir n por $N/3$ e fazer $N \to \infty$.)

8.2.3. Calcular $\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}\, 5h}{h}$.

(Sugestão: substituir h por $k/5$ e fazer $k \to 0$.)

8.2.4. Qual é o $\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{3}{N}\right)^N$?

8.3.1. Calcular as seguintes somas parciais

a) $1 + 1/3 + 1/9 + 1/27 + 1/81 + 1/243$

b) $2 + 2/11 + 2/11^2 + \cdots + 2/11^5$

c) $1 - 1/2 + 1/4 - 1/8 + 1/16 - 1/32 + 1/64$.

8.3.2. Encontrar uma expressão compacta para as seguintes somas parciais

a) $1 + r + r^2 + \cdots + r^{10}$

b) $1 - r + r^2 - r^3 + r^4 - \cdots + r^{10}$

c) $1/s + 1/s^2 + 1/s^3 + \cdots + 1/s^n$

d) $e + e/5 + e/5^2 + \cdots + e/5^k$.

8.3.3. Calcular as somas infinitas

a) $1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$ admitindo-se que $|r| < 1$

b) $c + c/2 + c/2^2 + c/2^3 + \cdots$

c) $1 + 1/s + 1/s^2 + 1/s^3 + \cdots$ admitindo-se que $|s| > 1$.

8.3.4. Calcular as somas infinitas

a) $1 - r + r^2 - r^3 + r^4 - \cdots \quad (-1 < r < +1)$,

b) $a + a/p + a/p^2 + a/p^3 + \cdots \quad (p > 1)$,

c) $1 + n^3 + n^6 + n^9 + n^{12} + \cdots \quad (-1 < n < 1)$.

8.3.5 Ao procurar determinar o tempo de vida média de 1 gene deletério, Li (1961, Pág. 150) foi levado à seguinte soma infinita

$$U = 1 + 2w + 3w^2 + 4w^3 + \cdots$$

onde $0 < w < 1$. Encontrar uma expressão compacta para U. (Sugestão: determinar primeiro a diferença $U - wU$).

8.3.6. Determinar a soma da série infinita

$$S = A - 2A^2 + 3A^3 - 4A^4 + \cdots \qquad (|A| < 1)$$

calculando primeiro $I = S + AS$.

8.3.7. O isótopo do Césio, Cs^{137}, perde anualmente 2,3% da sua massa por degradação radioativa. Cs^{137} é um poluente perigoso contido no resíduo radioativo. Admitamos que a cada ano a mesma massa M de Cs^{137} é liberada ao meio. Qual a massa total que se acumulará: (a) depois de n anos; (b) quando for alcançado o equilíbrio ($n \to \infty$)? (Adaptado de Woodwell, 1969.)

8.3.8. Em 1972 o consumo mundial de óleo mineral foi de $2{,}7 \times 10^9$ t (toneladas métricas). O aumento anual foi de 5,1%. As reservas totais de óleo cru na Terra (incluindo as conhecidas e desconhecidas) são estimadas em 700×10^9 t. Se o aumento anual permanecer constante quando se esgotarão as reservas?

8.3.9. No Iraque, um envenenamento epidêmico por metilmercúrio matou 459 pessoas em 1972. Seres humanos se tornaram expostos ao veneno quando ingeriram pão caseiro, acidentalmente preparado com trigo tratado com um fungicida de metilmercúrio. Os sintomas apareceram somente após semanas de exposição. Admitamos, para simplificar, que uma pessoa ingira uma dose constante diária d de veneno e que uma certa percentagem p do veneno acumulado seja excretada diariamente. Encontrar uma forma que relacione a quantidade de veneno estocado no corpo ao número de dias (Adaptado de Bakir *et al.*, 1973.)

8.3.10. Utilizando o teste da razão provar que a série

$$\frac{1}{(a+1)\,3} + \frac{1}{(a+2)\,3^2} + \frac{1}{(a+3)\,3^3} + \frac{1}{(a+4)\,3^4} + \cdots$$

é convergente.

8.3.11. Mostrar que a série

$$1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \frac{a^4}{4!} + \cdots .$$

é convergente para todos os valores $a \in \mathbb{R}$.

8.4.1. Como se comporta o limite de $3/(2-x)$

a) quando $x \uparrow 2$, b) quando $x \downarrow 2$.

8.4.2. Qual o comportamento do limite de $1/x^2$

a) quando $x \uparrow 0$, b) quando $x \downarrow 0$.

8.4.3. O tecido vivo somente pode ser excitado por uma corrente elétrica, se a corrente alcança ou excede um certo valor crítico que representamos por i. O limite i depende da duração t do fluxo da corrente. A lei de Weiss afirma que $i = a/t + b$ com constantes positivas a e b (cf. Defares *et al.*, 1973 Pág. 73). Descrever o comportamento do valor crítico i quando t se aproxima de zero e quando t tende para infinito.

8.4.4. Discutir o comportamento do limite de $f(x) = 2x/(x^2 - 4)$ para $x \uparrow 2$, $x \downarrow 2$, $x \uparrow (-2)$, e $x \downarrow (-2)$. Traçar uma gráfico de $f(x)$.

8.4.5. Um morcego emite ondas ultra-sônicas, que são refletidas por uma mariposa e o eco detectado pelo morcego. Mostrar que a intensidade do eco ouvido pelo morcego é inversamente proporcional à quarta potência da distância r entre o morcego e o inseto. [Sugestão: usar a Fórmula (8.4.5).] [Adaptado de Jarman (1970, Pág. 28).]

*8.5.1. Mostrar que a soma parcial dos números de Fibonacci a_n dados como em (8.5.1) podem ser escritos na forma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_{n+2} - 1 .$$

(Sugestão: adicionar as seguintes igualdades $a_1 = a_3 - a_2$, $a_2 = a_4 - a_3$ etc.)

*8.5.2. Ainda, para os números de Fibonacci, demonstrar que

a) $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} = a_{2n}$

b) $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n} = a_{2n+1} - 1$.

(Sugestão: adicionar as igualdades $a_1 = a_2$, $a_3 = a_4 - a_2$, $a_5 = a_6 - a_4$ etc. Para a demonstração de b, usar o resultado do Probl. 8.5.1.)

*8.5.3. Considerar a seqüência das seguintes frações

$$1,\ \frac{1}{1+1},\ \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}},\ \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}},\ \text{etc.}$$

Mostrar que ela é igual à seqüência $1/b_1, 1/b_2, 1/b_3, \ldots$, onde $b_1, b_2, b_3, \ldots$ são dados por (8.5.4).

*8.5.4. Com $b_1 = 1$, $b_2 = 2$ e a Fórmula (8.5.7) mostrar que $1 \leqslant b_n \leqslant 2$ para todos os números naturais n.

*8.5.5. Seja c_n definido por (8.5.6). Suponhamos que $b = 1/2\,(1 + \sqrt{5})$, isto é, satisfaça à Eq. (8.5.10). Verificar que

$$c_n = 1 - b + \frac{1}{b + c_{n-1}} = -c_{n-1}\frac{b-1}{b+c_{n-1}}.$$

*8.5.6. Com o resultado do problema anterior, concluir que

a) $|c_n| < 0{,}7$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$ e

b) $c_n \to 0$ para $n \to \infty$.

*8.5.7. Apresentamos, sem demonstração, uma fórmula para os números de Fibonacci a_n. Seja $b = 1/2\,(1 + \sqrt{5})$ e $c = 1/2\,(1 - \sqrt{5})$. Então,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(b^n - c^n).$$

Testar esta fórmula para $n = 1$ e $n = 2$. Usar a fórmula para demonstrar que $b_n = a_{n+1}/a_n$ tende a b quando $n \to \infty$.

Lista complementar de limite de funções

*8.5.2. Ainda, para os números de Fibonacci, demonstrar que

a) $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} = a_{2n}$

b) $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n} = a_{2n+1} - 1$.

(Sugestão: adicionar as igualdades $a_1 = a_2$, $a_3 = a_4 - a_2$, $a_5 = a_6 - a_4$ etc. Para a demonstração de b, usar o resultado do Probl. 8.5.1.)

*8.5.3. Considerar a seqüência das seguintes frações

$$1, \ \frac{1}{1+1}, \ \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}, \ \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}}, \ \text{etc.}$$

Mostrar que ela é igual à seqüência $1/b_1, 1/b_2, 1/b_3, \ldots$, onde $b_1, b_2, b_3, \ldots$ são dados por (8.5.4).

*8.5.4. Com $b_1 = 1$, $b_2 = 2$ e a Fórmula (8.5.7) mostrar que $1 \leqslant b_n \leqslant 2$ para todos os números naturais n.

*8.5.5. Seja c_n definido por (8.5.6). Suponhamos que $b = 1/2 (1 + \sqrt{5})$, isto é, satisfaça à Eq. (8.5.10). Verificar que

$$c_n = 1 - b + \frac{1}{b + c_{n-1}} = -c_{n-1} \frac{b-1}{b + c_{n-1}}.$$

*8.5.6. Com o resultado do problema anterior, concluir que

a) $|c_n| < 0{,}7$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$ e

b) $c_n \to 0$ para $n \to \infty$.

*8.5.7. Apresentamos, sem demonstração, uma fórmula para os números de Fibonacci a_n. Seja $b = 1/2\,(1 + \sqrt{5})$ e $c = 1/2\,(1 - \sqrt{5})$. Então,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (b^n - c^n).$$

Testar esta fórmula para $n = 1$ e $n = 2$. Usar a fórmula para demonstrar que $b_n = a_{n+1}/a_n$ tende a b quando $n \to \infty$.

Lista complementar do limite de funções