7

Soma Direta e Projeção

Esta seção trata da decomposição de um espaço vetorial como soma de subespaços independentes, mostra que essa decomposição equivale a definir um operador idempotente no espaço e estabelece a conexão entre projeções e involuções, ou simetrias.

Na Seção 2, vimos que se F_1 e F_2 são subespaços do espaço vetorial E, o subespaço vetorial de E gerado pela reunião $F_1 \cup F_2$ é o conjunto $F_1 + F_2$ de todas as somas $u + v$, onde $u \in F_1$ e $v \in F_2$. No caso particular em que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, escreve-se $F_1 \oplus F_2$ em vez de $F_1 + F_2$, diz-se que $F_1 \oplus F_2$ é a *soma direta* de F_1 com F_2 e prova-se (Teorema 2.1) que a condição $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ equivale a dizer que $u + v = u' + v'$, com $u, u' \in F_1$ e $v, v' \in F_2$, implica $u = u'$ e $v = v'$.

Existe uma noção análoga à de soma direta, que é o *produto cartesiano* $E_1 \times E_2$ de dois espaços vetoriais E_1 e E_2. Aqui E_1 e E_2 não precisam ser subespaços vetoriais do mesmo espaço E. Os elementos do conjunto $E_1 \times E_2$ são os pares ordenados (u, v), onde $u \in E_1$ e $v \in E_2$. As operações que tornam $E_1 \times E_2$ um espaço vetorial são definidas por

$$(u, v) + (u', v') = (u + u', v + v'), \quad \alpha(u, v) = (\alpha u, \alpha v),$$

para quaisquer $u, u' \in E_1$, $v, v' \in E_2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. O vetor nulo de $E_1 \times E_2$ é o par (0,0) e o inverso aditivo de (u, v) é $(-u, -v)$. Se

$\{u_1, \ldots, u_m\} \subset E_1$ e $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset E_2$ são bases, é imediato constatar que $\{(u_1, 0), \ldots, (u_m, 0), (0, v_1), \ldots, (0, v_n)\} \subset E_1 \times E_2$ é uma base, de modo que $\dim(E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$.

Se F_1 e F_2 são subespaços vetoriais de E, com $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, então a transformação linear

$$A \colon F_1 \times F_2 \to F_1 \oplus F_2,$$

definida por $A(u, v) = u + v$, $u \in F_1$, $v \in F_2$, é um isomorfismo, como se verifica facilmente. Se $\{u_1, \ldots, u_m\} \subset F_1$ e $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset F_2$ são bases então a base $\{(u_1, 0), \ldots, (u_m, 0), (0, v_1), \ldots (0, v_n)\}$ de $F_1 \times F_2$ é transformada por A no conjunto $\{u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n\}$ o qual é, por conseguinte, uma base de $F_1 \oplus F_2$. Segue-se que $\dim(F_1 \oplus F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 = m + n$.

No caso mais geral, em que a interseção $F_1 \cap F_2$ dos dois subespaços $F_1, F_2 \subset E$ não se reduz necessariamente ao vetor nulo, a soma $F_1 + F_2$ pode não ser uma soma direta mas, mesmo assim, está bem definida a transformação linear

$$A \colon F_1 \times F_2 \longrightarrow F_1 + F_2,$$

onde $A(u, v) = u + v$ para $u \in F_1$ e $v \in F_2$. Obviamente, A é sobrejetiva. Seu núcleo é formado pelos pares (u, v) tais que $u + v = 0$, isto é, $v = -u$, logo u e v pertencem ambos a F_1 e a F_2. Noutras palavras, $\mathcal{N}(A) = \{(u, -u); u \in F_1 \cap F_2\}$. A correspondência $u \mapsto (u, -u)$ é um isomorfismo evidente entre $F_1 \cap F_2$ e $\mathcal{N}(A)$. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos

$$\begin{aligned} \dim F_1 + \dim F_2 &= \dim(F_1 \times F_2) \\ &= \dim \mathcal{N}(A) + \dim(F_1 + F_2) \\ &= \dim(F_1 \cap F_2) + \dim(F_1 + F_2). \end{aligned}$$

Isto nos permite enunciar o

Teorema 7.1. *Sejam* F_1 *e* F_2 *subespaços de dimensão finita de um espaço vetorial* E. *Tem-se* $\dim F_1 + \dim F_2 = \dim(F_1 \cap F_2) + \dim(F_1 + F_2)$.

A noção de soma direta está intimamente ligada à noção de projeção. Se $E = F_1 \oplus F_2$ é a decomposição do espaço vetorial E como soma direta dos subespaços F_1 e F_2, define-se o operador linear $P: E \to E$, *projeção de* E *sobre* F_1*, paralelamente a* F_2, do seguinte modo: todo vetor $w \in E$ se escreve, de modo único, como soma $w = u + v$ de um vetor $u \in F_1$ com um vetor $v \in F_2$. Põe-se então $Pw = u$. (Veja Fig. 7.1.)

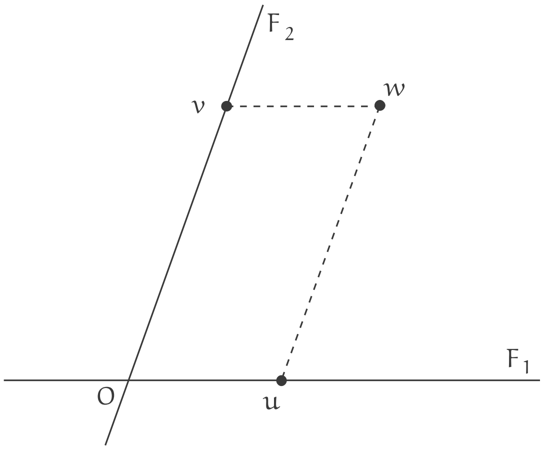

Figura 7.1.

O operador linear $P: E \to E$ assim definido tem imagem F_1 e núcleo F_2. Além disso, como se vê facilmente, P é *idempotente*, isto é, $P^2 = P$. O teorema seguinte mostra que, reciprocamente, todo operador linear idempotente é uma projeção.

Preliminarmente, observemos que se $P^2 = P$ então, para todo $w \in \mathcal{I}m(P)$, tem-se $Pw = w$ pois $w \in \mathcal{I}m(P) \Rightarrow w = Pv \Rightarrow Pw = PPv = Pv = w$.

Teorema 7.2. *Seja* $P: E \to E$ *um operador linear. Se* $P^2 = P$ *então* E *é a soma direta do núcleo com a imagem de* P*. Além disso,* P *é a projeção sobre* $\mathcal{I}m(P)$ *paralelamente a* $\mathcal{N}(P)$.

Demonstração: Todo $v \in E$ escreve-se como soma $v = (v - Pv) + Pv$, onde Pv, evidentemente, pertence a $\mathcal{I}m(P)$ e, como $P(v - Pv) = Pv - PPv = Pv - Pv = 0$, vemos que $v - Pv \in \mathcal{N}(P)$. Portanto $E = \mathcal{N}(P) + \mathcal{I}m(P)$. Se $w \in \mathcal{N}(P) \cap \mathcal{I}m(P)$, por um lado tem-se $Pw = 0$ e, por outro, $Pw = w$; logo $w = 0$. Assim $\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{I}m(P) = \{0\}$ e tem-se a soma direta $E = \mathcal{N}(P) \oplus \mathcal{I}m(P)$. A última afirmação do enunciado é óbvia. $\square$

Exemplo 7.1. Para todo operador linear $A: E \to E$ num espaço vetorial de dimensão finita vale a relação $\dim E = \dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{I}m(A)$. Isto porém não implica que se tenha sempre $E = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{I}m(A)$. Por exemplo, se $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é definido por $A(x,y) = (x-y, x-y)$ então, tomando $w = (1,1)$, temos $w = Av$, com $v = (2,1)$ e $Aw = 0$, logo $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{I}m(A)$ contém o vetor não-nulo w.

Outro exemplo de operador linear que está ligado à decomposição de um espaço vetorial como soma direta de dois subespaços é fornecido pelas involuções.

Uma *involução* é um operador linear $S: E \to E$ tal que $S^2 = I$, ou seja, $S(Sv) = v$ para todo $v \in E$.

Noutras palavras, uma involução é um operador invertível, igual ao seu próprio inverso. Um exemplo de involução é a reflexão (ortogonal) no plano em torno de uma reta que passa pela origem.

Veremos agora que toda involução é a reflexão em torno de um subespaço, paralelamente a outro.

Teorema 7.3. *Seja* $S: E \to E$ *uma involução. Os conjuntos* $F_1 = \{u \in E; Su = u\}$ *e* $F_2 = \{v \in E; Sv = -v\}$ *são subespaços vetoriais e* $E = F_1 \oplus F_2$. *Para todo* $w = u+v$, *com* $u \in F_1$ *e* $v \in F_2$ *tem-se* $Sw = u-v$. *Além disso,* $P = \frac{1}{2}(S+I)$ *é a projeção sobre* F_1, *paralelamente a* F_2. (Veja Fig. 7.2.)

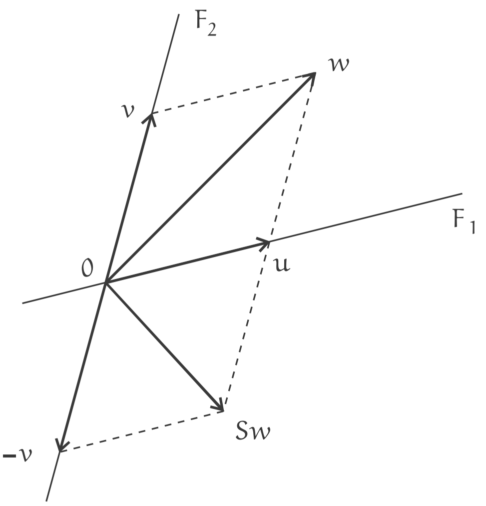

Figura 7.2.

Demonstração: Para todo $w \in E$, podemos escrever $w = u+v$, onde $u = (w + Sw)/2$ e $v = (w - Sw)/2$. Como $S^2 = I$, é claro que $Su = u$ e $Sv = -v$, ou seja, $u \in F_1$ e $v \in F_2$. É claro também que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ e que $w = u + v \Rightarrow Sw = u - v$ se $u \in F_1$ e $v \in F_2$. Finalmente,

$$\begin{aligned} P = \frac{1}{2}(S + I) \Rightarrow P^2 &= \frac{1}{4}(S^2 + 2S + I) \\ &= \frac{1}{4}(2S + 2I) \\ &= \frac{1}{2}(S + I) = P. \end{aligned}$$

Vê-se facilmente que o núcleo de P é F_2 e a imagem de P é F_1. □

Na situação descrita pelo Teorema 7.3, diz-se que a involução S é a reflexão em torno do subespaço F_1, paralelamente a F_2. O caso mais comum de reflexão é aquele em que se tem $\dim E = n$, $\dim F_1 = n-1$ e $\dim F_2 = 1$, de modo que S é a reflexão em torno do hiperplano F_1 paralelamente à reta F_2.

Exercícios

7.1. No plano $\mathbb{R}^2$, considere as retas F_1 e F_2, definidas respectivamente pelas equações $y = ax$ e $y = bx$, com $a \neq b$. Em seguida:

(1) Exprima cada vetor $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ como soma de um vetor em F_1 e um vetor em F_2.

(2) Obtenha a matriz (em relação à base canônica) da projeção $P \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que tem F_1 como núcleo e F_2 como imagem.

(3) Ache a matriz da reflexão $S \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, em torno da reta F_2, paralelamente a F_1.

7.2. Se $P, Q \colon E \to E$ são projeções e $PQ = QP$, prove que PQ é uma projeção cujo núcleo é $\mathcal{N}(P) + \mathcal{N}(Q)$ e cuja imagem é $\mathcal{I}m(P) \cap \mathcal{I}m(Q)$.

7.3. Exprima um vetor arbitrário $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ como soma de um vetor do plano F_1, cuja equação é $x + y - z = 0$, com um vetor da reta

F_2, gerada pelo vetor $(1,2,1)$. Conclua que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$. Determine a matriz (relativa à base canônica) da projeção $P\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que tem imagem F_1 e núcleo F_2.

7.4. É dado um operador linear $P\colon E \to E$. Assinale verdadeiro (V) ou falso (F):

( ) Se $E = \mathcal{N}(P) \oplus \mathcal{I}m(P)$ então P é uma projeção.

( ) Se $E = \mathcal{N}(P) + \mathcal{I}m(P)$ então P é uma projeção.

( ) Se P é uma projeção então $I - P$ também é.

( ) Se P é uma projeção então $\mathcal{I}m(P) = \mathcal{N}(I-P)$ e $\mathcal{N}(P) = \mathcal{I}m(I-P)$.

7.5. Se $\mathcal{N}(P) = \mathcal{I}m(I-P)$, prove que o operador linear $P\colon E \to E$ é uma projeção.

7.6. Mostre que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é a matriz (na base canônica) de uma projeção $P\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$. Escreva as equações que definem o núcleo e a imagem dessa projeção.

7.7. Prove que o operador $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dado por $P(x,y) = (-2x - 4y, \frac{3}{2}x + 3y)$ é a projeção sobre uma reta. Determine o núcleo e a imagem de P.

7.8. Considere o operador linear $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dado por

$$A(x,y,z) = (40x + 18y - 6z, 18x + 13y + 12z, -6x + 12y + 45z).$$

Mostre que $P = \frac{1}{49} \cdot A$ é uma projeção, que $\mathcal{I}m(P)$ é um plano e determine a equação desse plano.

7.9. Sejam F_1, F_2 subespaços vetoriais de E, com $\dim F_1 + \dim F_2 = \dim E$ (dimensões finitas). Prove que $E = F_1 \oplus F_2$ se, e somente se, $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

7.10. Seja $A: E \to E$ um operador linear num espaço vetorial de dimensão finita. Prove que $E = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{I}m(A)$ se, e somente se, $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^2)$.

7.11. Suponha que o espaço vetorial de dimensão finita E admita a decomposição $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$, como soma direta de subespaços vetoriais. (Vide Exercício 2.33.) Para cada $i = 1, \ldots, k$, escreva $G_i = F_1 \oplus \cdots \oplus F_{i-1} \oplus F_{i+1} \oplus \cdots \oplus F_k$ e chame de $P_i: E \to E$ a projeção sobre F_i, paralelamente a G_i. Prove que $P_1 + \cdots + P_k = I$ e $P_i P_j = 0$ se $i \neq j$.

7.12. Sejam $P_1, \ldots, P_k: E \to E$ operadores lineares tais que $P_1 + \cdots + P_k = I$ e $P_i P_j = 0$ se $i \neq j$. Prove que esses operadores são projeções.

7.13. Sejam $P, Q: E \to E$ projeções. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $P + Q$ é uma projeção;

(b) $PQ + QP = 0$;

(c) $PQ = QP = 0$.

[Para provar que (b) $\Rightarrow$ (c), multiplique à esquerda, e depois à direita, por P.]

7.14. Prove que o produto de duas involuções é uma involução se, e somente se, elas comutam.

7.15. Mostre que os seguintes operadores são involuções e determine, em cada caso, a projeção correspondente na forma do Teorema 7.3.

(a) $S: \mathcal{F}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $Sf = f^*$, $f^*(x, y) = f(y, x)$.

(b) $U: \mathcal{F}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})$, $Uf = \hat{f}$, $\hat{f}(x) = f(1/x)$.

(c) $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $V(x_1, \ldots, x_n) = (-x_1, \ldots, -x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$.

7.16. Se o espaço vetorial E tem dimensão finita, prove que para todo subespaço $F \subset E$ existe (pelo menos) um subespaço $G \subset E$ tal que $E = F \oplus G$.

7.17. Seja $E = F_1 \oplus F_2$. O *gráfico* de uma transformação linear $A: F_1 \to F_2$ é o subconjunto $G \subset E$ formado pelas somas $v + Av$, onde $v \in F_1$. Prove que G é um subespaço vetorial de E e que a projeção $P: E \to F_1$, restrita a G, define um isomorfismo entre G e F_1. Reciprocamente, se $G \subset E$ é um subespaço vetorial tal que a restrição de P a G é um isomorfismo de G sobre F_1, prove que G é o gráfico de uma transformação linear $A: F_1 \to F_2$.

7.18. Diz-se que $X \cup Y = Z$ é uma *partição* de Z quando $X \cap Y = \emptyset$. Se $J \cup K = \{1, \ldots, n\}$ é uma partição, prove que $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^J \oplus \mathbb{R}^K$, onde $\mathbb{R}^J$ e $\mathbb{R}^K$ são os subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$ gerados pelos vetores e_j, $j \in J$ e pelos vetores e_k, $k \in K$ respectivamente. Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial. Prove que existe uma partição $J \cup K = \{1, \ldots, n\}$ tal que F é o gráfico de uma transformação linear $A: \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}^K$, onde dim $F =$ número de elementos de J.

7.19. Seja $P: E \to E$ uma projeção. Prove que os vetores v e $(1-t)v + tPv$, para todo $v \in E$ e todo $t \in \mathbb{R}$, têm a mesma imagem por P.

7.20. Sejam $P, Q: E \to E$ projeções. Se $P + Q$ for ainda uma projeção, prove que $\operatorname{Im}(P + Q) = \operatorname{Im}(P) \oplus \operatorname{Im}(Q)$. Considerando as projeções $P, Q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, com $P(x, y) = (x, 0)$ e $Q(x, y) = \frac{1}{2}(x + y, x + y)$, mostre que a recíproca é falsa.

7.21. Prove que todo espaço vetorial de dimensão finita é soma direta de subespaços de dimensão 1.