

Revisão

(1)

Seja $f \in C^2$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, condições de otimalidade
Necessárias

Primeira ordem

$$f'(x) = 0 \quad (\text{Ponto estacionário})$$

Segunda ordem

$$f''(x) \geq 0, \quad f'(x) = 0$$

Condições Suficientes

$$f''(x) > 0, \quad f'(x) = 0$$

Necessárias se x^* é um minimizador

$\Rightarrow$ se cumprem as condições Necessárias

Suficientes se se cumprem as condições então
 x^* é um minimizador

Exemplo: $f(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{5x}{3} + 1$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x + \frac{5}{3} = 0 \Rightarrow$$
$$x^2 = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(3)(\frac{5}{3})}}{2 \cdot 3} = \frac{6 \pm 4}{6} = \frac{5}{3}$$
$$\searrow \frac{6-4}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f''(x) = (6x - 6) = 6(x - 1)$$

$$f''\left(\frac{5}{3}\right) = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4 > 0 \quad \text{minimizador}$$

$$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 6\left(\frac{1}{3} - 1\right) = -4 < 0 \quad (\text{não é minimizador})$$

Métodos unidimensionais

Achar um condicional

dada $f(x)$, achar $\bar{x}$ / $f'(\bar{x}) = 0$

Método de Newton achar $\bar{x}$ / $g(\bar{x}) = 0$

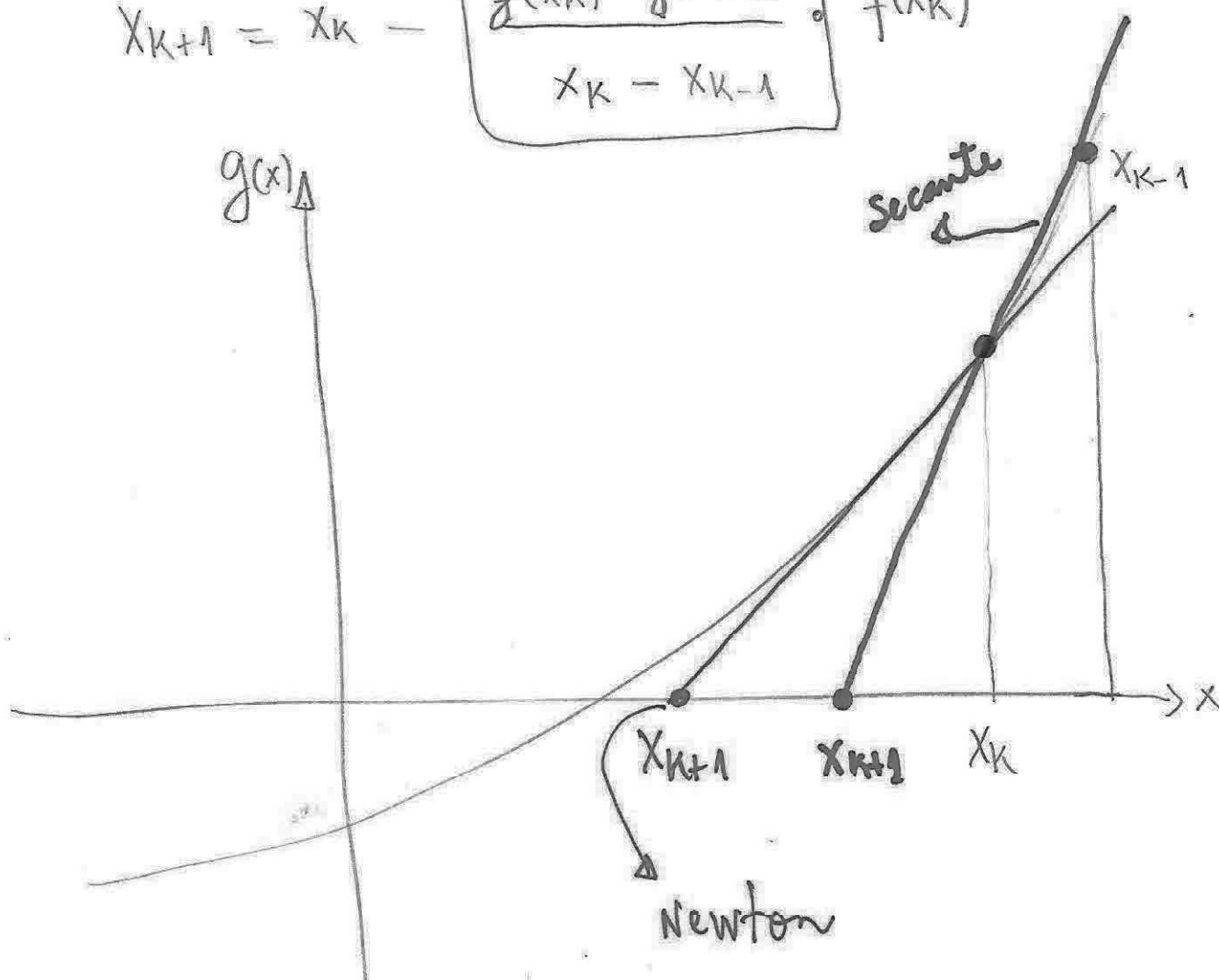
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f(x_k)} \cdot f(x_k)$$

Lembrar
Cálculo numérico

Método secante

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \cdot f(x_k)$$

condição
de secante



funções de varias variáveis

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t e_i) - f(x)}{t}$$

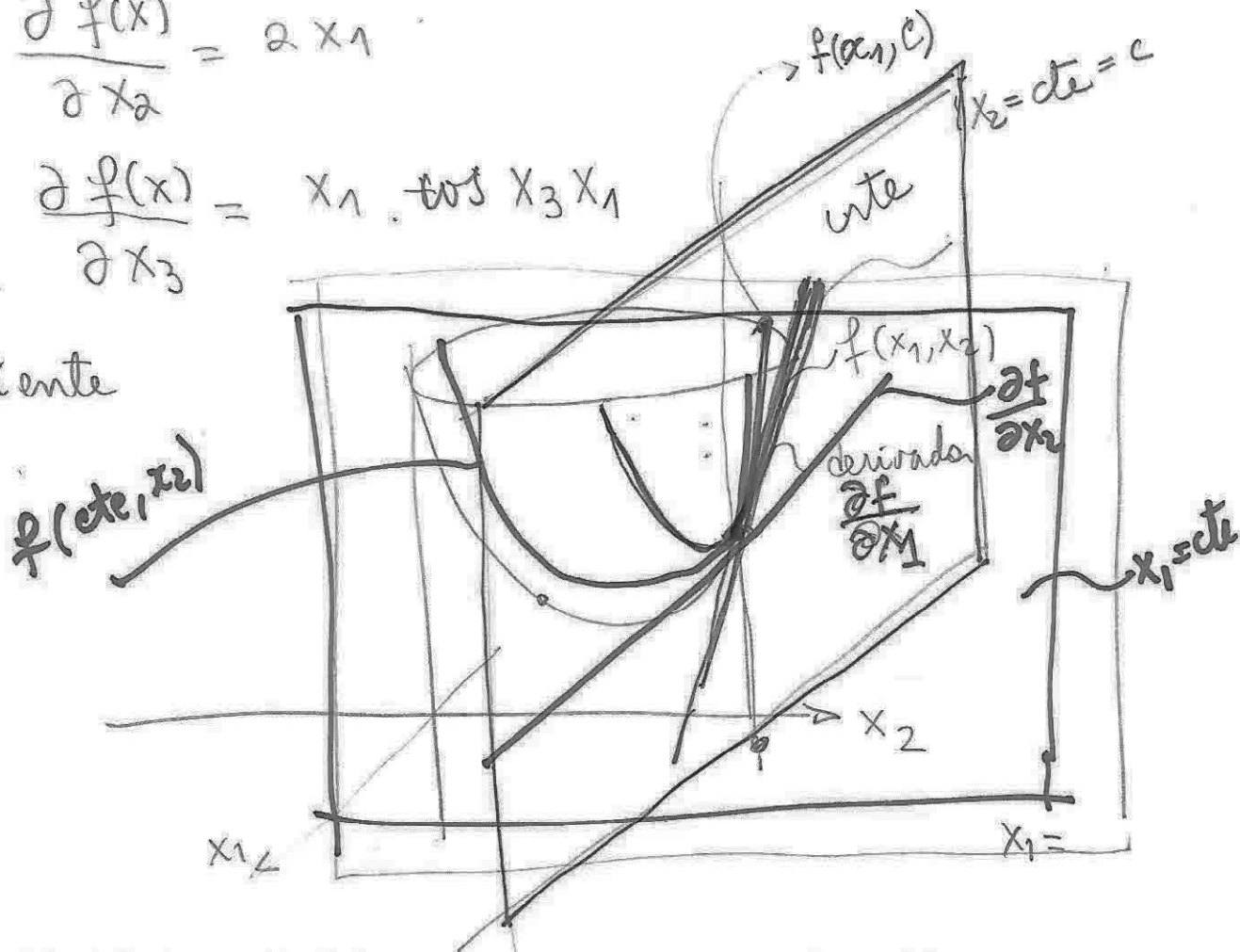
$\Rightarrow$ deixamos fixas todas as outras $x_1 \dots x_{i-1}, x_{i+1} \dots x_n$ e tomamos como variável só x_i

Exemplo

$$f(x) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + \sin x_3x_1$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 6x_1 + 2x_2 + x_3 \cos x_3x_1 \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 2x_1 \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} = x_1 \cdot \cos x_3x_1 \end{cases}$$

Gradiente



gradiente $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

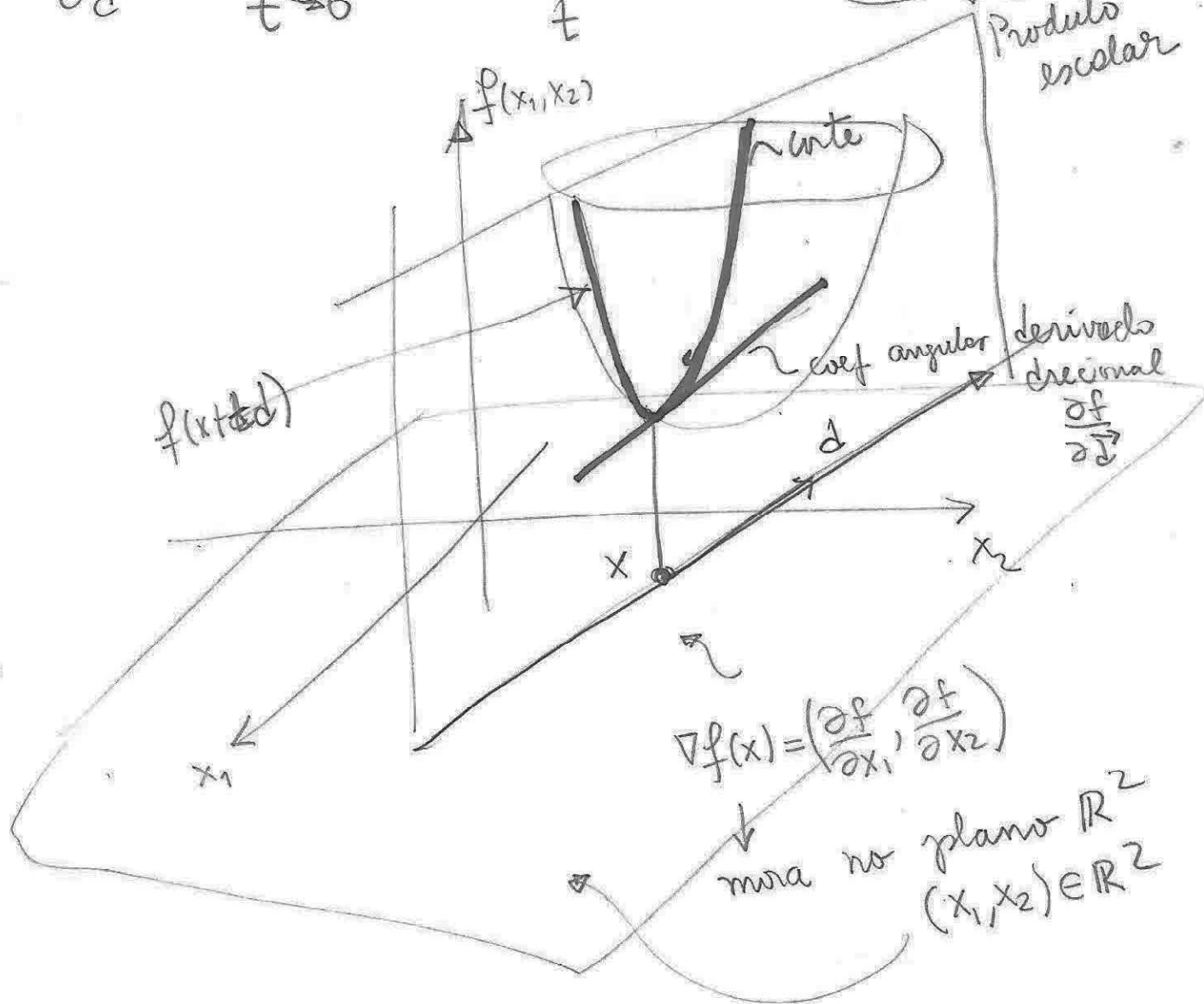
④

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

derivado direcional d direção $\|d\|=1$

$$\frac{\partial f}{\partial d} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+td) - f(x)}{t} = \nabla f(x) \cdot d$$

Produto escalar



Segunda derivada: Hessiana

5

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

$$\nabla^2 f(x) = H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 \sin x_3 + x_3 e^{x_2} + x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 \sin x_3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 1 + x_3 e^{x_2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1^2 \cos x_3 + e^{x_2}$$

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \sin x_3 \\ 1 + x_3 e^{x_2} \\ x_1^2 \cos x_3 + e^{x_2} \end{bmatrix}$$

gradiente

Hessiana

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2 \sin x_3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = 2x_1 \cos x_3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = x_3 e^{x_2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = e^{x_2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} = 2x_1 \cos x_3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} = e^{x_2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = -x_1^2 \sin x_3$$

$$H(x) = \begin{bmatrix} 2 \sin x_3 & 0 & 2x_1 \cos x_3 \\ 0 & x_3 e^{x_2} & e^{x_2} \\ 2x_1 \cos x_3 & e^{x_2} & -x_1^2 \sin x_3 \end{bmatrix}$$

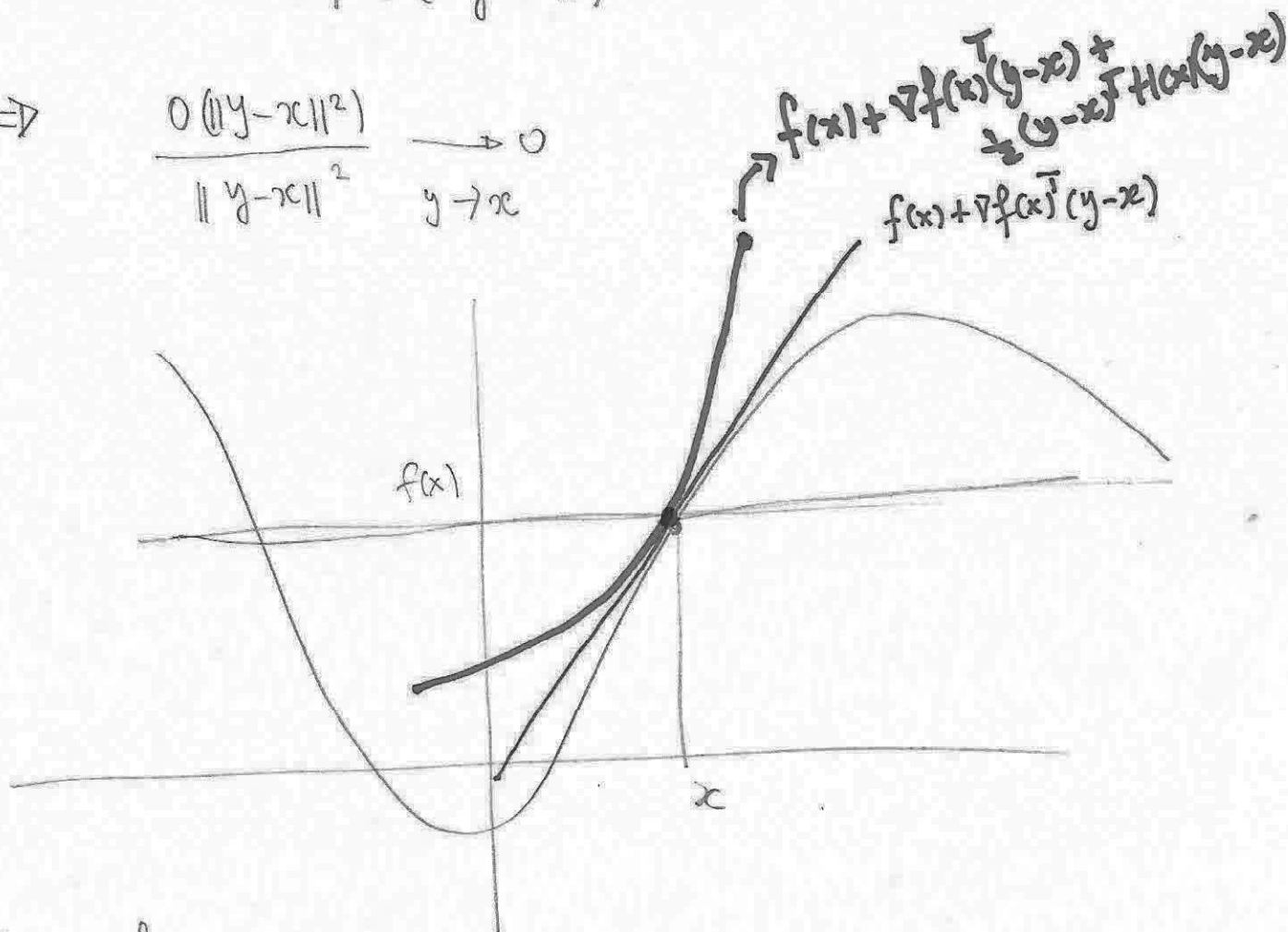
Aproximação de Taylor

(6)

$$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x)(y-x) + \frac{1}{2}(y-x)^T H(x)(y-x) + o(\|y-x\|^2)$$

$$\Rightarrow \frac{o(\|y-x\|^2)}{\|y-x\|^2} \xrightarrow{y \rightarrow x} 0$$



Exemplo

$$f(x_1, x_2) = x_1 \sin x_2 + x_2^2 + x_1 + 1$$

$$\text{em } x = (1, 0)$$

$$f(1, 0) = 2$$

$$\nabla f(1, 0) = \left[\sin(0) + 1, (1) \cos(0) + 2(0) \right] = [1, 1]$$

$$H(1, 0) = \begin{bmatrix} 0 & \cos(0) \\ \cos(0) & -x_1 \sin(0) + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & \cos x_2 \\ \cos x_2 - x_1 & \sin x_2 + 2 \end{bmatrix}$$

ordem (2)

$$f(x_1, x_2) = 2 + [1, 1] \cdot \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 - 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

quadrática

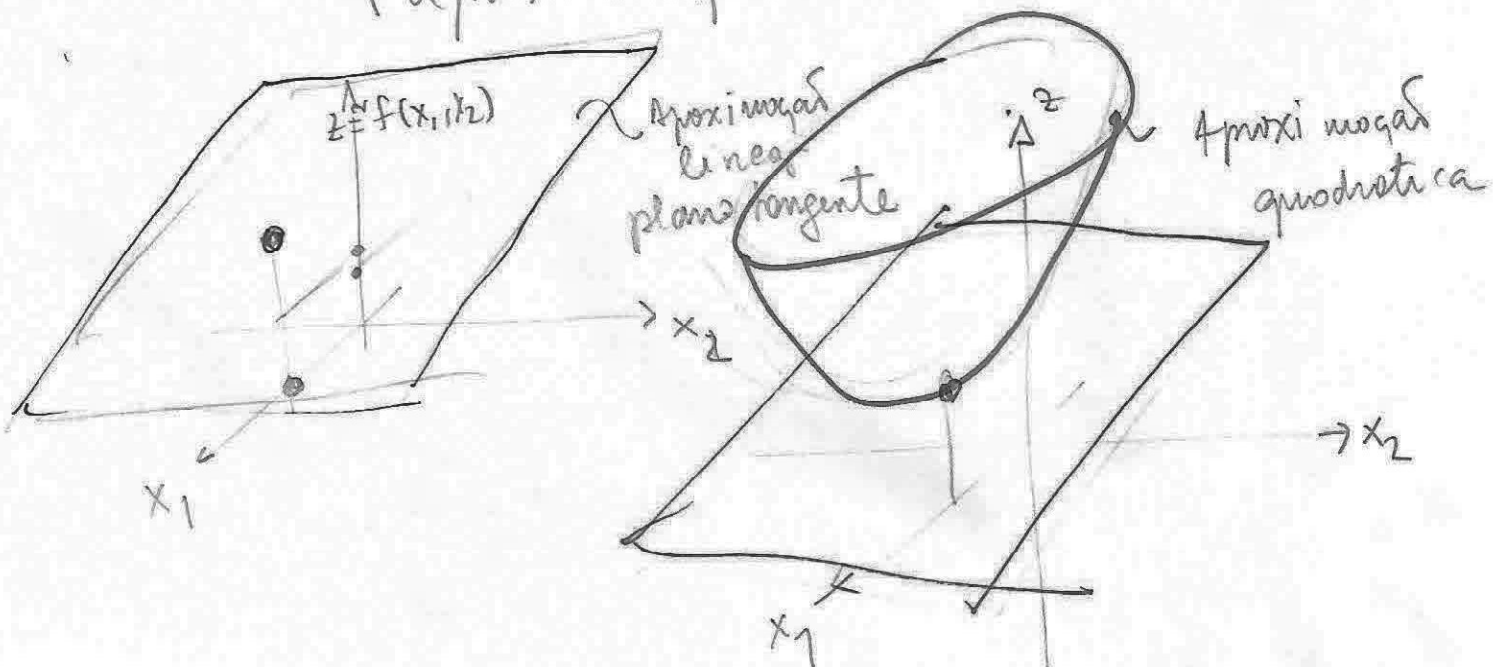
64

$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2) &\cong 2 + (x_1 - 1) + (x_2 + 1) + \frac{1}{2} (x_1 - 1, x_2) \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 - 1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \\
 &= x_1 + x_2 + 1 + \frac{1}{2} \left[x_1 x_2 + (x_2 (x_1 - 1 + 2x_2)) \right] = \\
 &= x_1 + x_2 + 1 + \frac{1}{2} (x_1 x_2 + x_2 x_1 - x_2 + 2x_2^2) = \\
 &= x_1 + \frac{1}{2} x_2 + x_1 x_2 + x_2^2 = \\
 &= \underline{x_2^2 + (x_1 + \frac{1}{2} x_2) + x_1 x_2 + x_2^2}
 \end{aligned}$$

Aproximação quadrática

$$f(x_1, x_2) \cong 2 + (x_1 - 1) + x_2 = x_1 + x_2 + 1$$

↑ aproximação linear



Plano tangente

(6)

Superfície $F(x, y, z) = 0$

$$(x_0, y_0, z_0) \in \{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = 0\}$$

Plano tangente em (x_0, y_0, z_0)

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Matrizes

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$A = [a_{11} \dots a_{nn}]$$

$$\det(A) = 0 \Rightarrow \{a_{11} \dots a_{nn}\} \text{ são LD}$$

A é singular

$$\neq 0 \Rightarrow \{a_{11} \dots a_{nn}\} \text{ não LI}$$

A é inversível

$$Ax = 0 \text{ com } x \neq 0 \Rightarrow A \text{ é singular}$$

Autovalores e autovetores

$$\text{dado } A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$Ax = \lambda x \Rightarrow (A - \lambda I)x = 0; \det(A - \lambda I) = 0$$

$x \neq 0$, λ autovalor, x autovetor

$A = A^T$ A é simétrica então tem

n autovalores reais λ_i

(λ_i, a_i) associados com $a_1, \dots, a_n$ autovetores ortogonais

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

exemplo

$$\begin{bmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (3 - \lambda)(2 - \lambda) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4 \text{ autovalores}$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \begin{bmatrix} 3-1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} =$$

$$2\alpha + \sqrt{2}\beta = 0 \Rightarrow \beta = -\sqrt{2}\alpha$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 4 \quad \begin{bmatrix} 3-4 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0$$

$$-\alpha + \sqrt{2}\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

auto pares

$$\left(1, \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \right) ; \left(4, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \right)$$