

Álgebra linearRevisão

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad A = [a_1, \dots, a_n] \quad a_i \in \mathbb{R}^m$$

$$\Rightarrow Ax = \sum a_i x_i \quad \Rightarrow \text{combinação linear das colunas de } A$$

$$\text{posto}(A) \leq \min\{m, n\}$$

$\text{posto}(A)$ é quantidade de linhas ^{de A} LI = quantidade de colunas ^{de A} LI

$Ax = b$ tem solução se $b \in \text{Im}(A)$

$$\text{Im}(A) = \{y \mid y = Ax\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

$$\text{Nu}(A) = \{x \mid Ax = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

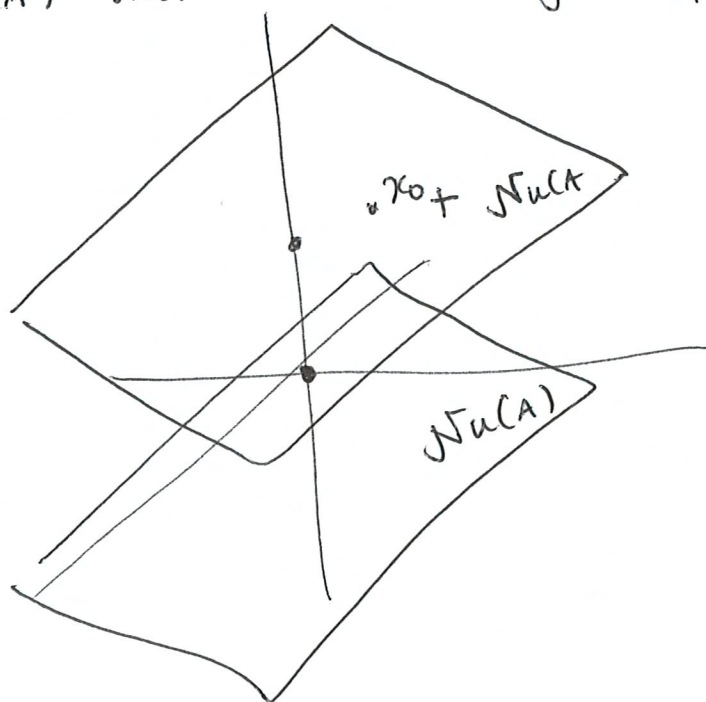
Solução do sistema

$$x_0 \text{ é solução de } Ax = b \Rightarrow Ax_0 = b$$

$$\text{Solução} \Rightarrow S = \{x = x_0 + z \mid z \in \text{Nu}(A)\}$$

S é uma variedade linear

$\Rightarrow$ o conjunto fatorial é caracterizado pelo $\text{Nu}(A)$ montado no ~~conjunto~~ ponto x_0



$$Ax = b \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Teorema da dimensão

$$\dim(\text{Nu}(A)) + \dim \text{Im}(A) = n$$

$$\text{Nu}(A) \perp \text{Im}(A^T)$$

$$x \in \text{Nu}(A) \quad w \in \text{Im}(A^T)$$

$$w^T x = (A^T y)^T x = y^T \underbrace{Ax}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \dim(\text{Nu}(A)) + \dim \text{Im}(A^T) = n$$

$$\text{e} \quad \text{Nu}(A) \oplus \text{Im}(A^T) = \mathbb{R}^n$$

soma direta

se $\text{posto}(A) = n \geq m \Rightarrow$ a solução de
 $Ax = b$ é única

Minimização com Restrições de Igualdade

(1)

Problema geral

$$\text{Min } f(x)$$

$$\text{s.a. } h(x)=0, g(x) \leq 0$$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p; h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad f, g, h \in C^2$$

Problema com restrições lineares de igualdade

$$\text{Min } f(x)$$

$$\text{s.a. } Ax=b$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad 1 \leq m < n \quad \boxed{\text{Rango}(A) = m}$$

Porto completo. =

$$\text{Conjunto feivel } S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax=b\}$$

$$\text{Seja } \text{Nu}(A) = \{z \in \mathbb{R}^n / Az=0\} \Rightarrow \text{Subespaço}$$

$$\text{Seja } x_0 \in S \text{ então } S = \{x = x_0 + z / z \in \text{Nu}(A)\}$$

$$y \in S \Rightarrow x = x_0 + z / z \in \text{Nu}(A)$$

$$\text{Seja } y = x_0 + z \Rightarrow Ay = Ax_0 + Az = Ax_0 = b \Rightarrow$$

$$y \in S, \text{ seja } w \in S, z = -x_0 + w \Rightarrow$$

$$Az = -Ax_0 + Aw = 0 \Rightarrow z \in \text{Nu}(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{x = x_0 + z / z \in \text{Nu}(A)\} \subset S$$

Seja $w \in S \Rightarrow$

$$A(w-x_0)=0$$

$$\Rightarrow (w-x_0) \in \text{Nu}(A) \Rightarrow \uparrow$$

$$w = x_0 + z$$

$$\text{com } z \in \text{Nu}(A)$$

$$\Rightarrow S \subset \{x = x_0 + z / z \in \text{Nu}(A)\}$$

↓
Rango A

$$S \cap \text{Im}(A) + \text{Nu}(A) = \mathbb{R}^n \Rightarrow \text{Nu}(A) = n-m$$

Seja $z_1, z_2, \dots, z_{n-m}$ uma base de $\text{Nu}(A)$

$$\text{chamemos } Z = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_{n-m}] \in \mathbb{R}^{n \times n-m}$$

(2)

$$\Rightarrow x \in S \Rightarrow$$

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i = x_0 + Z \gamma$$

$$\text{com } \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n-m})^T \in \mathbb{R}^{n-m}$$

$$\Rightarrow S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = x_0 + Z \gamma, \gamma \in \mathbb{R}^{n-m} \right\}$$

Em consequência os problemas

$$\begin{aligned} \text{Min } f(x) \\ \text{s.a. } Ax = b \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} \text{Min } \varphi(\gamma) \\ \gamma \in \mathbb{R}^{n-m} \end{aligned}$$

(1)

$$\begin{aligned} \text{com} \\ \varphi(\gamma) = f(x_0 + Z \gamma) \end{aligned}$$

(2)

veja que o problema (2) é um problema restrito

As condições de 1ª ordem seja $x^* = x_0 + Z \gamma^*$

$$\nabla \varphi(\gamma^*) = 0$$

$$\nabla \varphi(\gamma^*) = \nabla_{\gamma} f(x_0 + Z \gamma^*) = Z^T \nabla f(x^*) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla f(x^*) \text{ é ortogonal as linhas de } Z^T$$

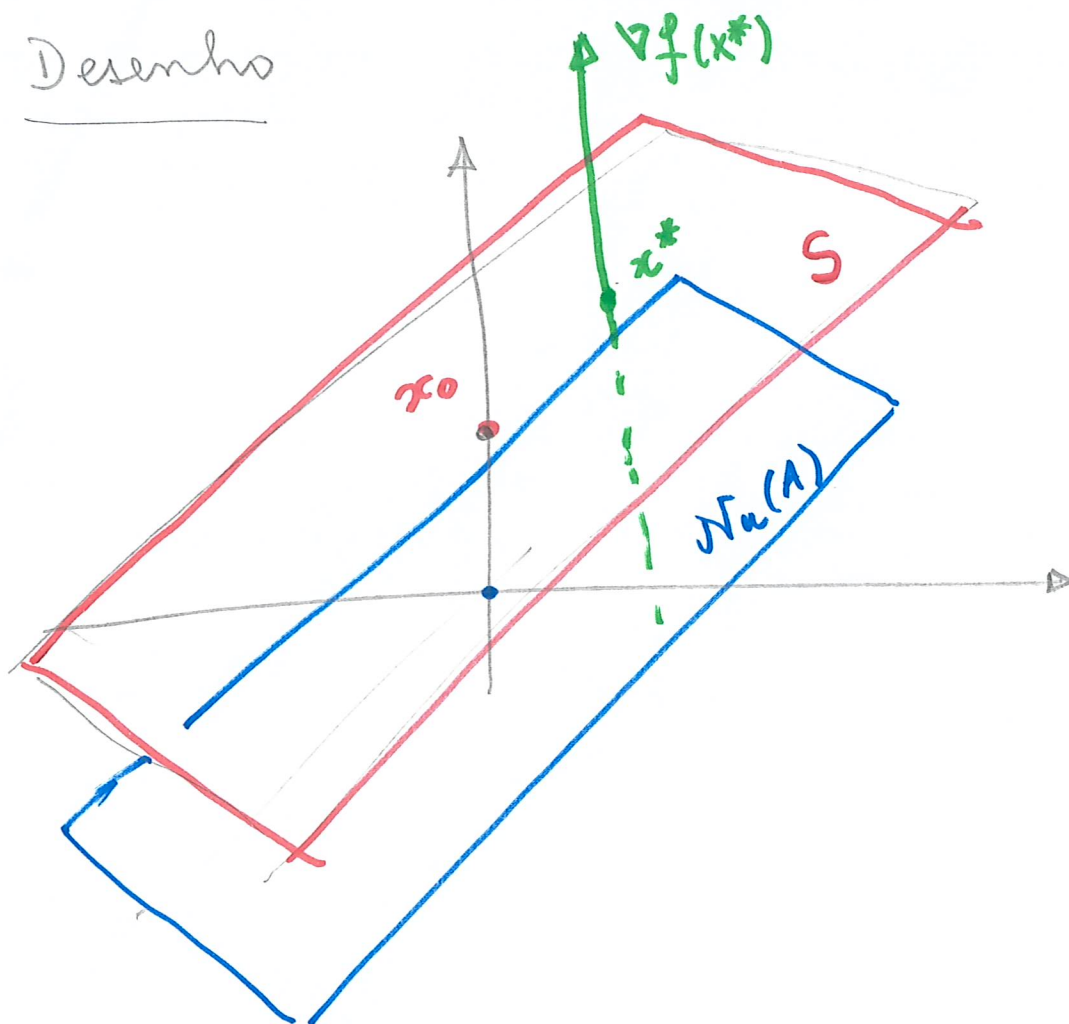
$$\Rightarrow \nabla f(x^*) \text{ é ortogonal ao Nucleo de } A$$

$$\Rightarrow \nabla f(x^*) \text{ pertence a } \text{Im}(A^T)$$

$$\nabla f(x^*) \in \text{Im}(A^T)$$

Desenho

3



Se $\nabla f(x^*) \in \text{Im}(A^T)$

$$A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla f(x^*) = A^T \gamma =$$

$$\Rightarrow \nabla f(x^*) = [a_1 \ a_m] \gamma = \sum_{i=1}^m a_i \gamma_i$$

$\Rightarrow \gamma$ tal que $\nabla f(x^*)$ é uma combinação linear com coeficientes γ das linhas de A

Isto é conhecido como as condições Karush-Kuhn-Tucker

Condições de Segunda Ordem

(5)

claramente

$$\nabla^2 \varphi(x^*) \geq 0 \quad (\text{Semidef positiva})$$

$$\nabla \varphi(x) = Z^T \nabla f(x_0 + Zx)$$

$$\nabla^2 \varphi(x) = Z^T \nabla^2 f(x_0 + Zx) Z$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \varphi(x^*) = Z^T \nabla^2 f(x^*) Z \geq 0$$

$$Z^T \nabla^2 f(x^*) Z \in \mathbb{R}^{(n \times m) \times (m \times m)}$$

podemos falar que Z é uma base do Nucleo

Cond 2º ordem

$$\left\{ \begin{array}{l} y^T \nabla^2 f(x^*) y \geq 0 \\ y^T \nabla f(x^*) = 0 \\ Ax^* = b \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} y \in \text{Nu}(A) \\ y \in \text{Nu}(A) \end{array} \right.$$

ou

$$x^* \in \mathbb{R}^n \text{ e'}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) Z^T \nabla f(x^*) = 0 \\ (ii) Z^T \nabla^2 f(x^*) Z \succcurlyeq 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{semi} \\ \text{def (+)} \end{array}$$

é suficiente tem que agregar

$$y^T \nabla^2 f(x^*) y \geq 0$$

$$y \in \text{Nu}(A)$$

ou

$$Z^T \nabla^2 f(x^*) Z \succcurlyeq 0$$

$$\text{def (+)}$$

Exemplo

(6)

$$\min f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$s.a \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

veremos a nucleo

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 & x_3 &= -2x_1 \\ x_1 - x_2 &= 0 & x_2 &= x_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N_u(A) = [x_1, x_1, -2x_1] =$$

$$N_u(A) = \{ \lambda (1, 1, -2) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

Base do nucleo de A (1, 1, -2)

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = \delta_1 + \delta_2 \\ 2x_2 = \delta_1 - \delta_2 \\ 2x_3 = \delta_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 2\delta_1 = \\ \delta_1 = x_1 + x_2 \\ \delta_2 = x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = \frac{\delta_1}{2} \end{cases}$$

Pela fatibabilidade

7

$$\gamma_2 = 0$$

$$\gamma_1 \neq \frac{\gamma_1}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{\gamma_1^* = \frac{2}{3}} \quad \boxed{\gamma_2 = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_3^* = \frac{1}{3}} ; \boxed{x_2^* = \frac{1}{3}} \quad \boxed{x_1^* = \frac{1}{3}}$$

Agora segundo ordem

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x^*) = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Z^T \nabla^2 f(x^*) Z = (1, 1, -2) \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} =$$

$$= (1, 1, -2) \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -4/3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{12}{3} = 4 > 0$$

é um minimizador local

que significa isto que

$$\nabla f(x^*) = \bar{A}^T \gamma$$

$\Rightarrow$ se o sistema $A\gamma = \nabla f(x)$ tem solução para $x = x^*$ então x^* é um ponto estacionário com γ^* multiplicadores $\Rightarrow$

$$\nabla f(x^*) = \gamma_1^* z_1 + \dots + \gamma_{n-m}^* z_{n-m}$$

Sistema.

As condições de otimalidade de 1ª ordem

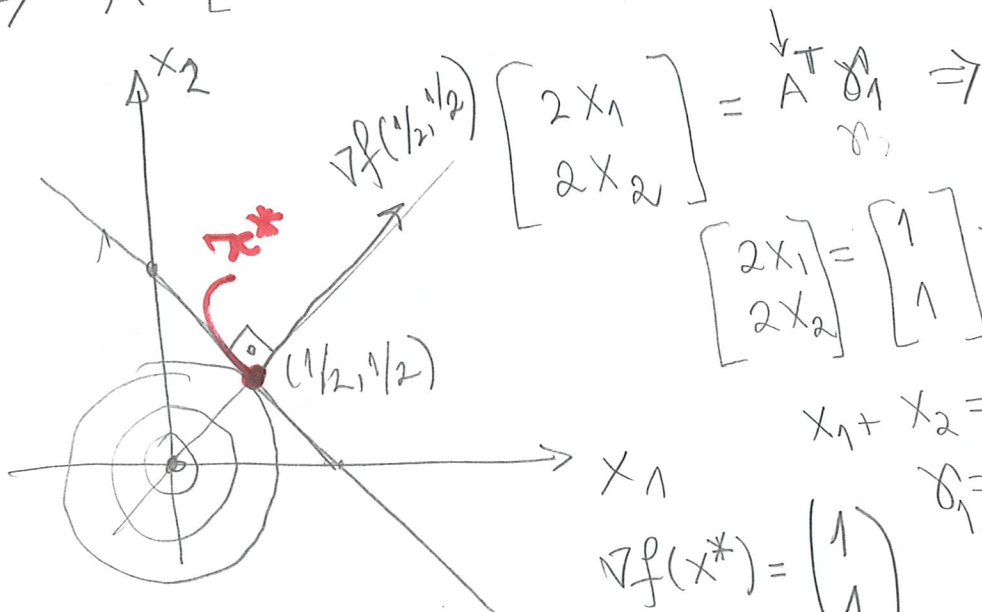
$$\nabla f(x^*) = A^T \lambda$$

Exemplo

$$\text{Min } x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{s.a. } x_1 + x_2 = 1$$

$$\Rightarrow A = [1, 1] \quad b = 1; \quad A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 1$$



$$\nabla f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = A^T \gamma_1 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \gamma_1 \Rightarrow$$

$$x_1 = \gamma_1/2$$

$$x_2 = \gamma_1/2$$

$$x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow$$

$$\gamma_1 = 1 \Rightarrow$$

$$x_1^* = 1/2$$

$$x_2^* = 1/2$$

$$\nabla f(x^*) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Agora veja

⑧

$\bar{x}_1 = 1/2, \bar{x}_2 = 1/2, \bar{x}_3 = 0$ é fatorial

$$\nabla f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \delta_1 + \delta_2 = 1 \\ \delta_1 - \delta_2 = 1 \\ \delta_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta_2 = 1 \\ \delta_2 = -1 \end{cases}$$

não tem
solução

$\nabla f(\bar{x})$ não pode ser escrito como

$$\nabla f(\bar{x}) = \cancel{A}^T \delta$$