

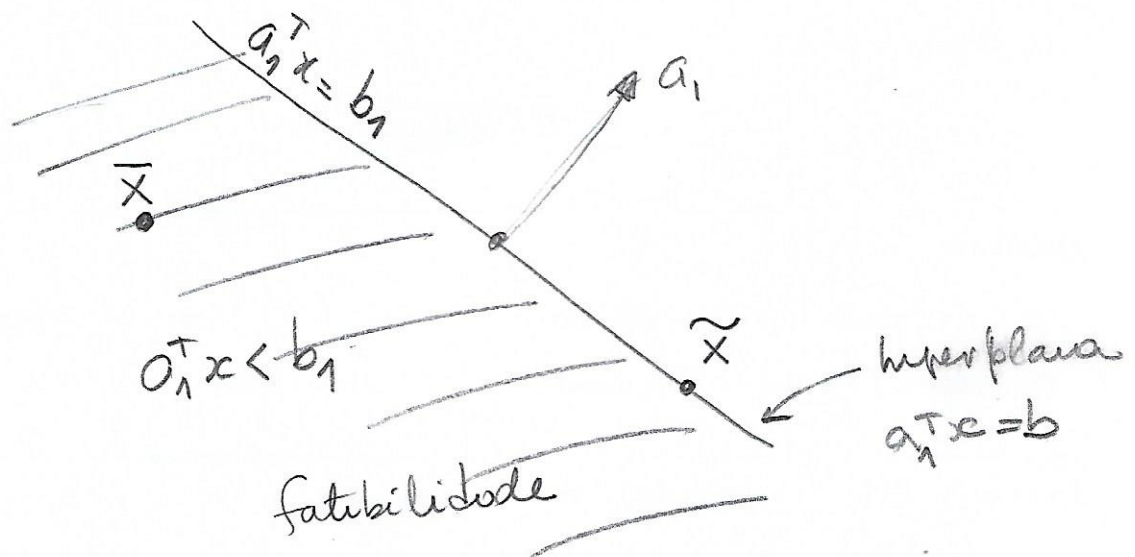
Minimização com Restrições de Desigualdade ①

$$\begin{aligned} \text{Min } f(x) \\ Ax \leq b \end{aligned}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (não tem restrições nos valores $m < n$)

Análise de Restrições ativas

$$a_1^T x \leq b_1$$



$\bar{x}$ é não ativa $a_1^T \bar{x} < b_1$

$a_1^T \tilde{x} = b_1$ é ativa

$\Rightarrow$ em $\bar{x}$ é como se o problema não tem restrições

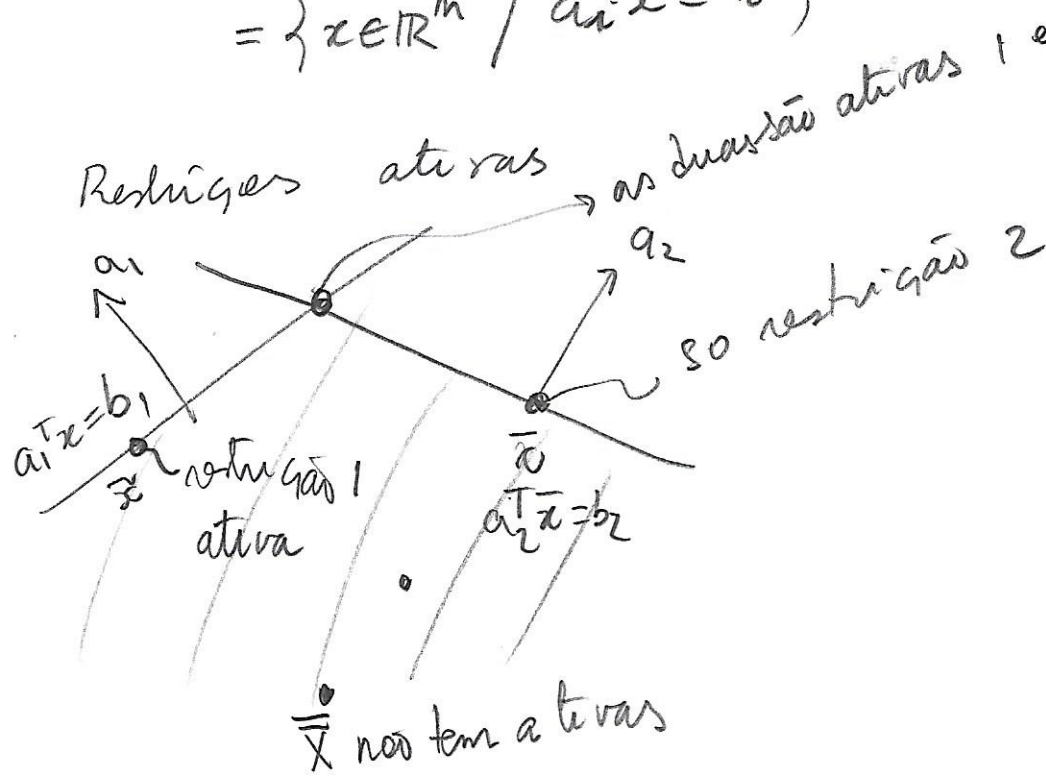
em $\tilde{x}$ a restrição é ativa e deve ser considerada

Regra de Fatorialidade

(2)

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n / a_i^T x \leq b_i, i=1 \dots m\}$$



chamamos

$$I(x) = \{i / a_i^T x = b_i\}$$

Restrições ativas

e

$$0 \leq r(x) \leq m$$

$$r(x) = \# I(x)$$

chamamos de direção fatorial d, se partir de x se $\exists \bar{\delta}$ tal que $\frac{\delta}{2}(x + \gamma d) \in S$ para

$$\gamma \in [0, \bar{\delta}]$$

Fatiabilidade

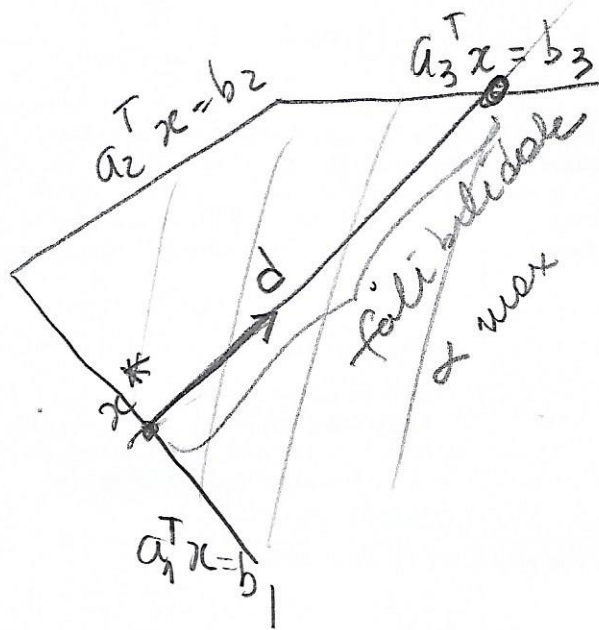
(3)

$$S = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x \leq b_i \quad i=1, \dots, m \}$$

Agora vamos estudar a possibilidade de poder ter ^{em} fatiabilidade de qualquer seja

$$x^* \in S \quad \Rightarrow \quad a_i^T x^* \leq b_i \quad \forall i=1, \dots, m$$

$$\Rightarrow x^* + \alpha d$$



$$a_i^T (x^* + \alpha d) = \underbrace{a_i^T x^*}_{\leq b_i} + \alpha a_i^T d$$

fatiabilidade

se $a_i^T d \leq 0 \Rightarrow$ pode ser qualquer $\alpha > 0$ segue sendo fatível

$$\text{se } a_i^T d > 0 \Rightarrow$$

$$a_i^T (x^* + \alpha d) = a_i^T x^* + \alpha a_i^T d \leq b_i \Rightarrow \alpha \leq \frac{b_i - a_i^T x^*}{a_i^T d} \quad \left. \vphantom{\alpha \leq \frac{b_i - a_i^T x^*}{a_i^T d}} \right\} \text{maxima}$$

> 0

o que podemos andar sem perder factibilidade é ③

$$\alpha_{\max} = \min \left\{ \frac{b_i - a_i^T x^*}{a_i^T d} \mid a_i^T d > 0 \right\}$$

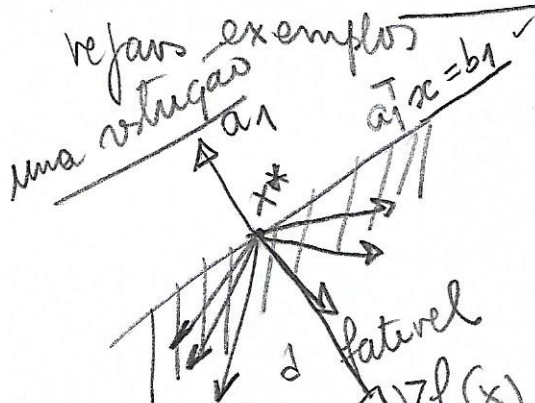
1) $a_i^T d \leq 0 \forall i$ posso tomar qualquer $\alpha \geq 0$

2) os $a_i^T d \leq 0$ não importam

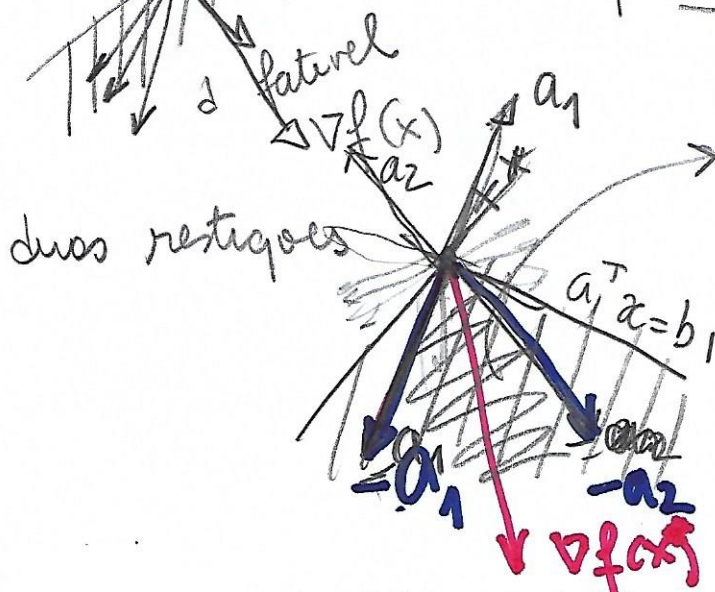
Com isto dado d caracterizo o $\alpha > 0$ que permite manter-me no conjunto
condições de otimalidade
buscamos d fatorial de deslizar para identificar
os condições de otimalidade

Sabemos que

$$\nabla f(x) d \geq 0 \text{ para toda } d \text{ fatorial}$$



$$\Rightarrow \nabla f(x^*) = \lambda_1 a_1 \quad \lambda_1 \leq 0$$



$$\nabla f(x^*) = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$$

$$\lambda_1 \leq 0 \text{ e } \lambda_2 \leq 0$$

Teorema

Seja $x^* \in S$ minimizador local de

(4)

$$\text{Min } f(x)$$

$$\text{s.a. } x \in S = \{x / a_i^T x = b_i\}$$

Seja $I = \{i / a_i^T x^* = b_i\}$ ativas ativas
 $r(x^*) = \# I = \{i_1, \dots, i_{r(x^*)}\} \quad 1 \leq r(x^*) \leq n$

Seja $A_I \in \mathbb{R}^{r(x^*) \times n}$ e $b_I = (b_{i_1}, \dots, b_{i_{r(x^*)}})^T$

Porto $A_I = r(x^*)$ posto máxima

então existe $\lambda \in \mathbb{R}_{\leq 0}^{r(x^*)}$ tal que

$$\nabla f(x^*) = \sum_{k=1}^{r(x^*)} \lambda_k a_{i_k} \quad \text{e } \lambda_k \leq 0 \quad 1 \leq k \leq r(x^*)$$

Prova:

seja (i) $\nabla f(x^*) \neq A_I^T \lambda$ (sistema não tem solução)

$\Rightarrow x^*$ não pode ser minimizador de

$$\text{Min } f(x)$$

$$\text{s.a. } A_I x = b_I$$

mas $\bar{S} = \{x / A_I x = b_I\} \subset S = \{x / Ax \leq b\}$

se não é minimizador em $\bar{S}$ também não é minimizador em S

Não consideramos o sinal dos λ_i

(5)

(u) existe $\nabla f(x^*) = A_I^T \lambda$ e existe j tal que $\lambda_j > 0$

Seja $\bar{I} = I - \{j\}$, $\text{Nu}(A_{\bar{I}}) \neq \text{Nu}(A_I)$
 esta contido de maneira própria porque $\text{pto}(A_{\bar{I}})$ é
 completo de finitos

$$d = \mathcal{P}_{\text{Nu}(A_{\bar{I}})}(-\nabla f(x^*))$$

de

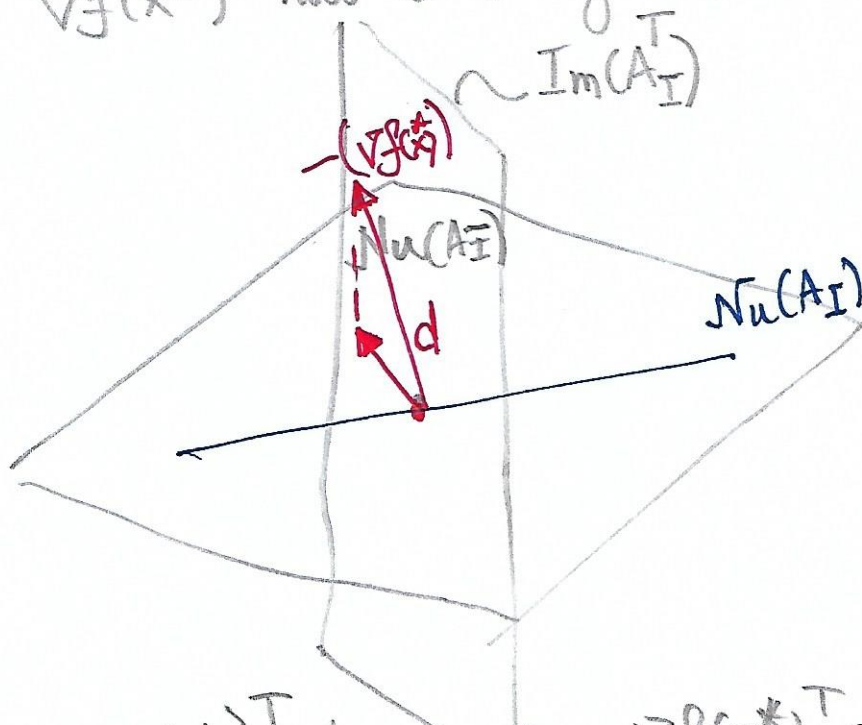
então $d \in \text{Nu}(A_{\bar{I}})$, $d \perp \text{Im}(A_{\bar{I}}^T)$

o seja $d \perp a_{i_k}$ $\forall k \neq j$ $\{j \text{ foi retirado de } I$
 $\text{e } \lambda_j \neq 0\}$

Sabemos que $\nabla f(x^*) = A_I^T \lambda \Rightarrow \nabla f(x^*) \perp \text{Im}(A_{\bar{I}}^T)$ e

$$\nabla f(x^*) \neq A_{\bar{I}}^T \bar{\lambda} \quad \forall \bar{\lambda} \in \mathbb{R}^{(\#I)-1}$$

$\Rightarrow \nabla f(x^*)$ não é ortogonal a $\text{Im}(A_{\bar{I}}^T)$



$$(-\nabla f(x^*) - d)^T d = 0 \Rightarrow -\nabla f(x^*)^T d = \|d\|^2 > 0$$

$$\Rightarrow \nabla f(x^*)^T d < 0$$

(6)

$$\nabla f(x^*) = \lambda_1 a_{x_1} + \dots + \lambda_j a_{x_j} + \dots + \lambda_{n(x^*)} a_{x_{n(x^*)}}$$

$$\nabla f(x^*)^T d = \underbrace{\lambda_1 a_{x_1}^T d}_{=0} + \dots + \lambda_j a_{x_j}^T d + \dots + \underbrace{\lambda_{n(x^*)} a_{x_{n(x^*)}}^T d}_{=0}$$

$$0 \geq \underbrace{\lambda_j a_{x_j}^T d}_{>0}$$

$$\Rightarrow \Rightarrow a_{x_j}^T d < 0$$

$\Rightarrow d$ é de descida é fatorial

concluimos que se x^* é um minimizador

existe λ , $\lambda_i \leq 0$ tal que

$$\boxed{\nabla f(x^*) = A_I^T \lambda \quad \lambda_i \leq 0}$$

Notar que:

(7)

Se o sistema

$$\nabla f(x^*) = A_I^T \lambda \quad \text{não tem solução}$$

tomamos
$$d = \frac{\nabla f(x^*)}{\|A_I^T \lambda\|}$$

é uma direção de descida fatorial

Se o sistema

$$\nabla f(x^*) = A_I^T \lambda \quad \text{tem solução mas existe } \lambda_j > 0$$

então tomamos

$$d = - \frac{\nabla f(x^*)}{\|A_{\bar{I}}^T\|}$$

onde $\bar{I} = I - \{j\}$

é de descida é fatorial

Ao buscarmos de achar a condição de
otimalidade e se não se verifica
sabemos como construir uma direção
de descida

Um exemplo

9

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(x^*) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla f(x^*) = \underset{\uparrow}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

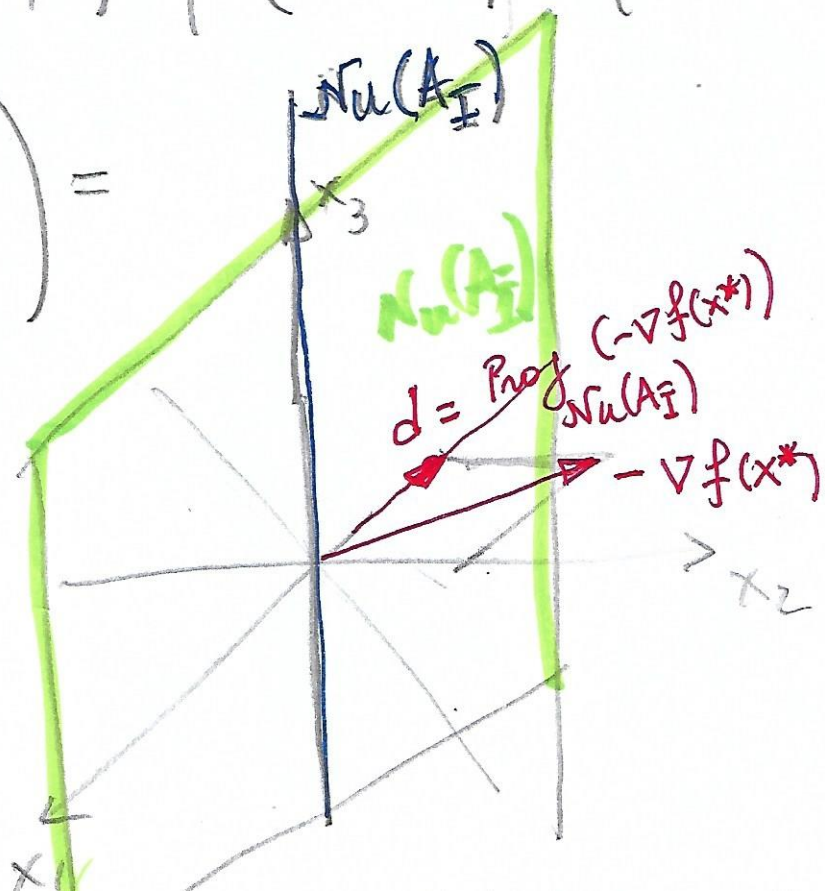
$$\text{Nu}(A) = \{(0, 0, 1) / \lambda \in \mathbb{R}\}$$

retornamos $(1, 0, 0)$ e novo núcleo

$$\mathcal{N}_{A_I} = \{ \alpha (1, 0, 0) + \beta (0, 0, 1) / \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

$$d = p_{\text{Nu}(A_I)} \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



⇒

$$d^T \cdot (0, \overbrace{1}^{a_2}, 0) = \overbrace{0}^{a_2}$$

$$\underbrace{d^T}_{a_1} \cdot (1, 0, 0) = -1 < 0$$

clarante d é fatorial de descida

Condições de segundo ordem

8

Teorema: Seja $f \in C^2$ um minimizador local do problema (9.1) e $r(x^*) \in \bar{I}$ definidos como as restrições ativas e sua cardinalidade

(i) x^* verifica a condição de primeira ordem

(ii) $\forall y \in N_u(A_+)$ tem-se que $y^T \nabla^2 f(x^*) y \geq 0$

Prova: Exercício

(Dica Analizar os problemas

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.t. } Ax = b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.t. } A_I x = b_I \end{aligned}$$

Condições suficientes

(ii) $\forall y \in N_u(A_I)$
 $y \neq 0$

$$y^T \nabla^2 f(x^*) y > 0$$

onde $J = \{i \in \{1, \dots, r(x^*)\} \mid \lambda_i < 0\}$

$\Rightarrow$ Luenberger