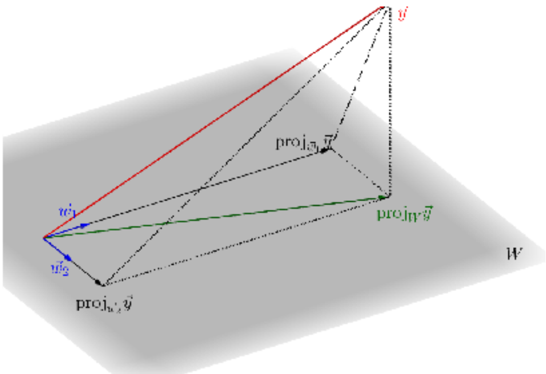
10.1 Projeção ortogonais sobre subespaços

No último capítulo, estudamos projeções ortogonais e vimos que a projeção ortogonal de $\vec{y}$ na direção de um vetor $\vec{w}$ pode ser calculada por

$$\text{proj}_{\vec{w}} \vec{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \quad \vec{w} \tag{10.1}$$

Gostaríamos de endereçar agora a seguinte questão: como obter a projeção de um vetor $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ sobre um plano W?



Vamos trabalhar geometricamente: suponhamos que o plano

$$W = \text{Span}\left\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\right\} \tag{10.2}$$

e que os vetores $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ são ortogonais. Em outras palavras, $\left\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\right\}$é uma base ortogonal de W. Como veremos abaixo, o Processo de Gram-Schmidt fornece um algoritmo para obter uma base ortogonal de um espaço vetorial a partir de uma outra base qualquer de modo que sempre é possível considerar uma base ortogonal e, então, conseguimos calcular projeções.

A **projeção ortogonal sobre o subespaço** W, denotada por $\text{proj}_W \vec{y}$, é definida como

$$\text{proj}_W \vec{y} = \text{proj}_{\vec{w}_1} \vec{y} + \text{proj}_{\vec{w}_2} \vec{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{w}_1}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1} \quad \vec{w}_1 + \frac{\vec{y} \cdot \vec{w}_2}{\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2} \quad \vec{w}_2. \tag{10.3}$$

Notamos que este vetor pertence a W, já que é uma combinação linear dos elementos de uma base de W. Mas mais fundamental é o fato de a projeção ser feita em uma direção ortogonal ao plano: passamos a verificar que

$$\vec{y} - \text{proj}_W \vec{y} \quad \text{é ortogonal a } W. \tag{10.4}$$

Qualquer vetor de W pode ser escrito como

$$\vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{w}_1}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1} \quad \vec{w}_1 + \frac{\vec{w} \cdot \vec{w}_2}{\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2} \quad \vec{w}_2. \tag{10.5}$$

Exercício 8. Utilize as propriedades do produto escalar e a ortogonalidade da base $\left\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\right\}$ para verificar que

$$\vec{w} \cdot (\vec{y} - \text{proj}_W \vec{y}) = 0. \tag{10.6}$$

Exemplo 93. Vamos calcular a projeção do vetor

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10.7}$$

sobre o plano gerado pelos vetores

$$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{10.8}$$

Observamos inicialemente que *somos permitidos* de usar a fórmula acima, já que os vetores $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ formam uma base ortogonal de W:

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = 4 + 10 - 14 = 0. \tag{10.9}$$

Calculamos

$$\begin{aligned} \text{proj}_W \vec{y} &= \frac{\vec{y} \cdot \vec{w}_1}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1} \quad \vec{w}_1 + \frac{\vec{y} \cdot \vec{w}_2}{\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2} \quad \vec{w}_2 = \frac{4+2-7}{16+4+49} \quad \vec{w}_1 + \frac{1+5+2}{1+25+4} \quad \vec{w}_2 \\ &= -\frac{1}{69} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix} + \frac{4}{15} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 / 115 \\ 30 / 23 \\ 73 / 115 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Desenvolvemos acima o conceito de projeção ortogonal sobre um subespaço do espaço $\mathbb{R}^3$ de dimensão três apenas pela conveniência da visualização geométrica. Na verdade, o conceito pode ser definido em qualquer dimensão.

Seja $W \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial de dimensão k e $\left\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k\right\}$ uma base ortogonal de W. Dado um vetor $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ qualquer, definimos a **projeção ortogonal de $\vec{y}$ sobre W** como

$$\text{proj}_W \vec{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{w}_1}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1} \quad \vec{w}_1 + \frac{\vec{y} \cdot \vec{w}_2}{\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2} \quad \vec{w}_2 + \cdots + \frac{\vec{y} \cdot \vec{w}_k}{\vec{w}_k \cdot \vec{w}_k} \quad \vec{w}_k \tag{10.10}$$

Pode-se verificar, como no Exercício 8 acima, que

$$\vec{w} \cdot (\vec{y} - \text{proj}_W \vec{y}) = 0, \quad \text{para qualquer } \vec{w} \in W, \tag{10.11}$$

isto é, a projeção $\text{proj}_W \vec{y}$ pertence a W e $\vec{y} - \text{proj}_W \vec{y}$ é ortogonal a todo elemento de W, assim como nossa intuição esperaria.

Exemplo 94. Calcular a projeção do vetor

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{10.12}$$

sobre o espaço tridimensional W gerado pelos vetores

$$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{10.13}$$

Observar que a base $\left\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\right\}$ de W é ortogonal! Devemos então calcular

$$\begin{aligned} \text{proj}_W \vec{y} &= \frac{\vec{y} \cdot \vec{w}_1}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1} \quad \vec{w}_1 + \frac{\vec{y} \cdot \vec{w}_2}{\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2} \quad \vec{w}_2 + \frac{\vec{y} \cdot \vec{w}_3}{\vec{w}_3 \cdot \vec{w}_3} \quad \vec{w}_3 \\ &= \frac{-18}{14+36} \quad \vec{w}_1 + \frac{1-2-2}{1+4+1} \quad \vec{w}_2 + \frac{2+6+4}{4+9+4+4} \quad \vec{w}_3 \\ &= -\frac{9}{25} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{4}{7} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 / 14 \\ -552 / 175 \\ -1 \\ -578 / 175 \\ 23 / 14 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Confira estas contas com uma calculadora (os coeficientes dos vetores nem sempre são bonitinhos!)

(../../aviso.php) Informe erros ou (https://github.com/reamat/AlgebraLinear/blob/master/Semana12/semana12-fatQR.tex) edite você mesmo!
(s13.html) (main.html#s13-projex00e7x00e3o_ortogonais_sobre_subespax00e7os.html) (s13-distx00e2ncia_a_subespax00e7os_e_a_melhor_aproximax0(

Recursos
Álgebra Linear (../../AlgebraLinear/index.html)
Cálculo (../../Calculo/index.html)
Cálculo Numérico (../../CalculoNumerico/index.html)
Computação Científica (../../ComputacaoCientifica/index.html)
Transformadas Integrais (../../TransformadasIntegrais/index.html)
Repositórios (https://github.com/reamat)

Projeto
Página Inicial (../../index.html)
Participar (../../participe.html)
Fórum (../../forum.html)
Organizadores (../../organizadores.html)
Perguntas frequentas (../../perguntas_frequentes.html)

IME - UFRGS
Página do IME (https://www.ufrgs.br/ime/)
Página da UFRGS (http://www.ufrgs.br)

UFRGS - IME - Recursos Educacionais Abertos de Matemática. Contato: reamat@ufrgs.br (mailto:reamat@ufrgs.br).

(../../aviso.php) Informe erros ou (https://github.com/reamat/AlgebraLinear/blob/master/Semana12/semana12-fatQR.tex) edite você mesmo! ×