

Exercícios Lista 6

1

1. Considere o problema

$$\text{Min } 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a. } x_1 + x_2 \leq 8, -x_1 + 2x_2 \leq 4 \quad x_1, x_2 \geq 0$$

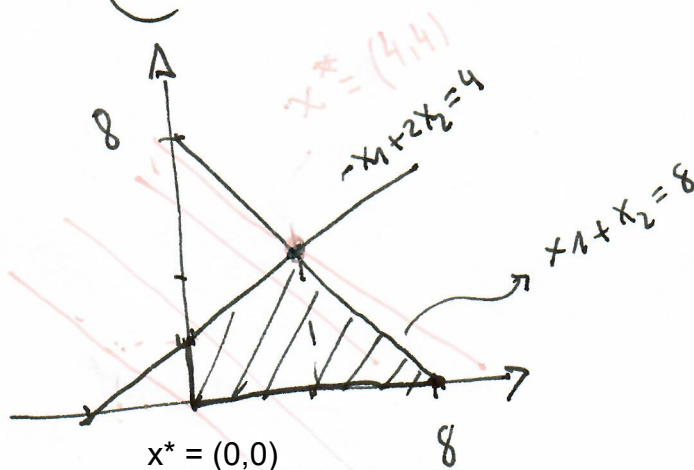
Cond de optimalidade

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \lambda_4$$

$$\nabla f(x)$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0 \quad \text{variáveis}$$

$$e \quad \begin{cases} \lambda_1 (x_1 + x_2 - 8) = 0 \\ \lambda_2 (-x_1 + 2x_2 - 4) = 0 \\ \lambda_3 x_1 = 0 \\ \lambda_4 x_2 = 0 \end{cases}$$



Extremos

$$(0,0), (0,2), (4,4), (8,0)$$

a função é linear então está em um extremo

(2)

$$\cancel{x} = (4, 4) \text{ ativa } \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$$

$$1) \quad f(x) = 2(4) + 3(4) = 20$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 3 \end{cases}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{3}, \lambda_1 = \frac{5}{3}$$

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ não é minimizador

$$2) \quad x^* = (0, 0) = f(x) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases} \text{ ótimo}$$

$$3) \quad x = (0, 2) \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\lambda_2 = \frac{2}{3} > 0$$

$$\lambda_1 = -\frac{8}{3}$$

$\Rightarrow$ não é ótimo

$$4) \quad x = (8, 0)$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = 2 > 0$$

$$\lambda_2 = -1$$

não é ótimo

8.

Resolva o seguinte problema

(3)

$$\text{Max } P(x) = \prod_{i=1}^m x_i$$

$$\text{s.a } \begin{cases} \sum_{i=1}^m x_i = c \\ x_i \geq 0 \quad i=1, \dots, n \end{cases}$$

(1)

Deduz a seguinte desigualdade entre as médias geométricas e aritméticas

$$\underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i}_{\text{aritmética}} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^m x_i}$$

O problema ~~tem~~ soluções para $x_i > 0$ se e só se nenhuma das x_i são activas. Se $\sum_{i=1}^m x_i = c$ e activa então a condição de otimalidade para máximo são

$$\begin{cases} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m x_k = \lambda & j=1, \dots, n \\ \sum_{k=1}^m x_k = c \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\prod_{k=1}^m x_k = \lambda x_j \quad j=1, \dots, n \quad (1)$$

(4)

$$\Rightarrow \lambda \sum_{k=1}^m x_k = m \prod_{k=1}^m x_k$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{m \prod_{k=1}^m x_k}{\sum_{k=1}^m x_k}$$

$$\Rightarrow \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m x_k = \frac{m \prod_{k=1}^m x_k}{\sum_{k=1}^m x_k} \Rightarrow$$

$$x_j = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k \quad j=1, \dots, n$$

de(1)

esta é a solução $\Rightarrow$

$$\prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^m x_k \right) \geq \prod_{i=1}^m x_i$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^m x_k \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^m x_i}$$

que é a desigualdade aritmética-geométrica

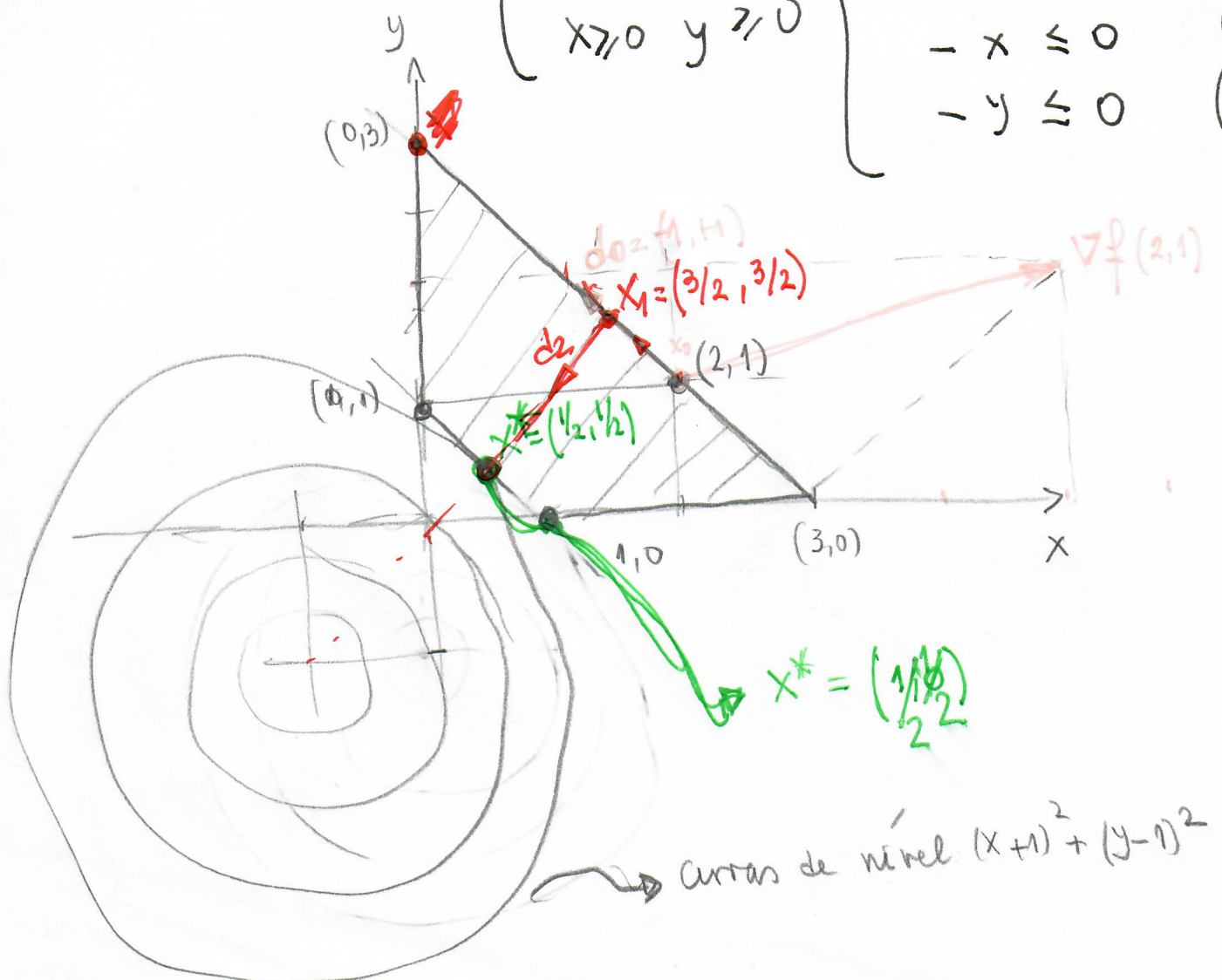
Exercício Lista 7

1

3 - Resolva Algebrico e graficamente o problema de abeiros pelo metodo das restricoes ativas tomando como ponto inicial $(2,1)^T$ e justificando todos os passos

$$\text{Min } (x+1)^2 + (y+1)^2$$

$$\text{sa } \begin{cases} x+y \geq 1 \\ x+y \leq 3 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (-1 \ -1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq -1 & (1) \\ (1 \ 1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq 3 & (2) \\ -x \leq 0 & (3) \\ -y \leq 0 & (4) \end{cases}$$



curvas de nível $(x+1)^2 + (y+1)^2$

$$1) \quad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2(x+1) \\ 2(y+1) \end{pmatrix}$$

②

$$\text{em } (2,1) =$$

$$\nabla f(2,1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$P \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{não tem solução}$$

$$\text{atava } x+y=3 \quad ④$$

$$N_a(A_3) = \{ \lambda (1, -1) \}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3$$

A_2

$$P(-\nabla f(2,1)) = \frac{\langle (1, -1) (-6, -4) \rangle}{2} \quad (1, -1) =$$

$N(A_3)$

$$= (-1, 1) \quad \text{toma } d^0 = (1, 1)$$

$$f((2,1) + \alpha(1,1)) = f(2+\alpha, 1+\alpha) = (3+\alpha)^2 + (2+\alpha)^2 \Rightarrow 2-3+\alpha+2+\alpha=0$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\bar{\alpha} = \max \left\{ \frac{0 - (-1)}{1} \right\} = 1$$

$$X' = \left(2 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

$$① \quad (-1, -1) (1, -1) = 0 \quad \text{Não}$$

$$② \quad (1, 1) (1, -1) = 0 \quad \text{Não}$$

$$③ \quad (-1, 0) (1, -1) = -1 \quad \text{Não}$$

$$④ \quad (0, -1) (1, -1) = 1 \quad \checkmark$$

$$2) \quad X^1 = \left(\frac{3}{2} \quad \frac{3}{2} \right)$$

3

ativa ③ $\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$

$$\nabla f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 5 \text{ solução}$$

$\lambda > 0$ não é solução

Retorno ③ das ativas não tenho ativas

$$-\nabla f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ pontos } \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f\left(\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\frac{3}{2} - \alpha, \frac{3}{2} - \alpha\right) =$$

$$\bar{\alpha} = \left\{ \frac{3-1}{2}, \frac{0-(-3/2)}{1}, \frac{0-(-3/2)}{1} \right\} = \left\{ 1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\} = 1$$

① $(-1, -1)(-1, -1) = 2 > 0 \quad \checkmark$

② ativo

③ $(-1, 0)(-1, -1) = 1 \quad \checkmark$

④ $(0, -1)(-1, -1) = 1 \quad \checkmark$

$$= \left(\frac{3}{2} - \alpha + 1\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - \alpha + 1\right)^2 =$$

$$2 \left(\frac{5}{2} - \alpha\right)^2 \quad \bar{\alpha} = \frac{5}{2}$$

como nos $\bar{\alpha} = 1$

$$X^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

4

$$\nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

atira ① $x+y = 1/2 + 1/2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = -3/2$$

$\Rightarrow \lambda < 0$ e' ótimo ✓