

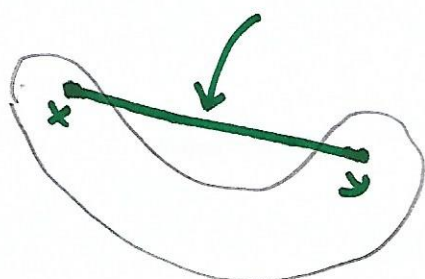
# Convexidade

①

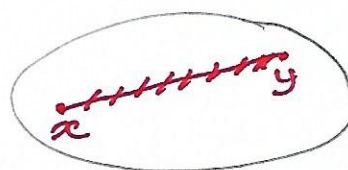
Quando as condições de 1ª ordem são suficientes  
quando minimizador local  $\equiv$  minimizador global

## Definições

Um subconjunto  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  é convexo  $\iff \forall x, y \in S$   
 $\lambda \in [0, 1]$  se verifica que  
 $\lambda x + (1-\lambda)y \in S$



Não convexo



convexo

Uma função  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa sobre S  
convexo  $\iff \forall x, y \in [0, 1]$

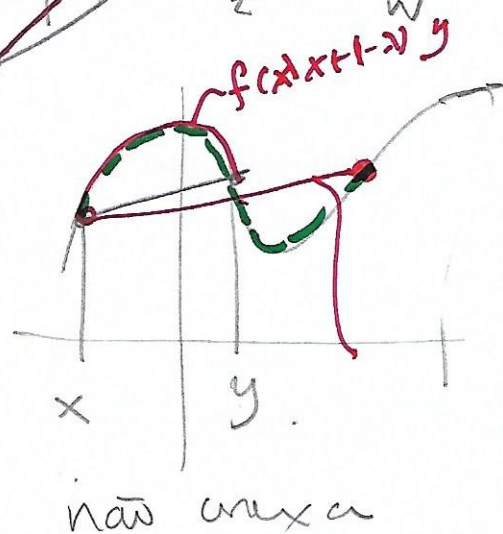
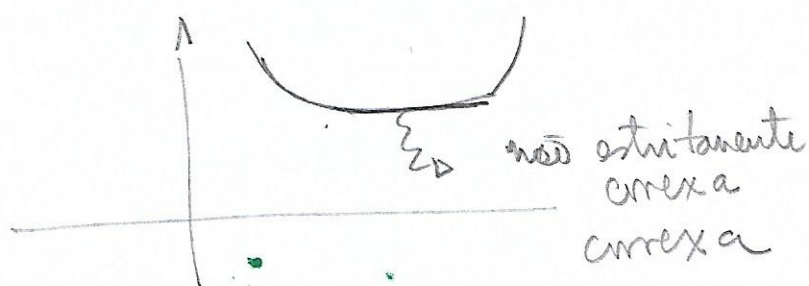
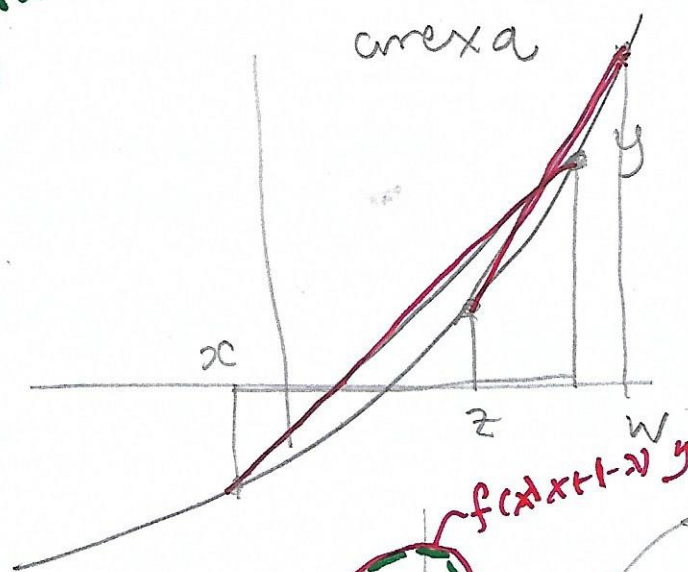
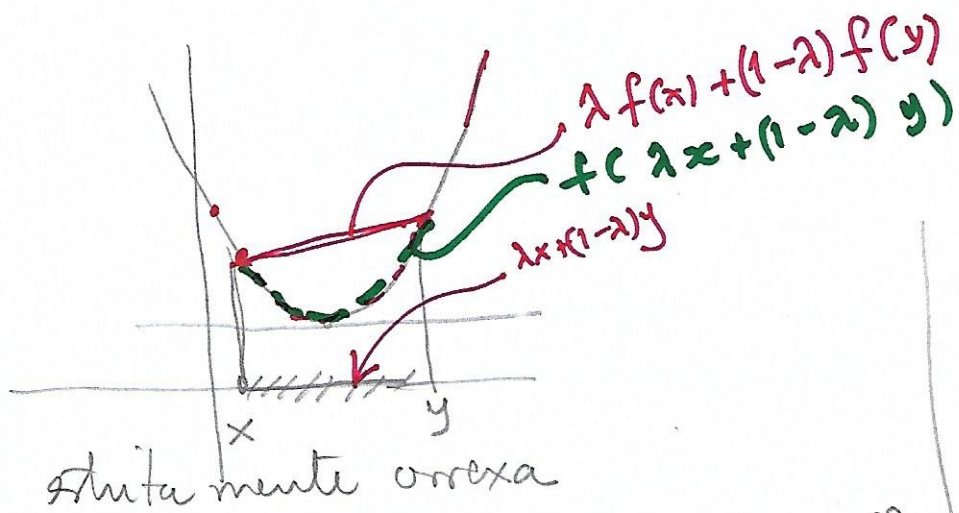
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

se para  $\forall \lambda \in (0, 1)$  e  $x \neq y$  vale que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

então que  $f$  é estritamente convexa

(2)



$f$  diferenciável outras caracterizações

Proposição 1:  $f \in C^1$ . Se  $f$  é convexa. Então  $f$  é

$$\text{convexa} \iff f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)(y-x)$$

ou seja,  $\forall y, x \in S$  de  $f$  vale  $\nabla f(x)(y-x) \leq f(y) - f(x)$

$$\Rightarrow) f(\alpha y + (1-\alpha)x) \leq \alpha f(y) + (1-\alpha)f(x) \Rightarrow$$

$$f(x + \alpha(y-x)) - f(x) \leq \alpha [f(y) - f(x)]$$

$$\frac{f(x + \alpha(y-x)) - f(x)}{\alpha} \leq f(y) - f(x)$$

$\alpha$

tomando limite

(3)

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(x + \alpha(y-x)) - f(x)}{\alpha} \leq f(y) - f(x)$$

$$\downarrow$$
$$\nabla f^T(x)(y-x) \leq f(y) - f(x) \Rightarrow$$

$$\boxed{f(y) \geq f(x) + \nabla f^T(x)(y-x)}$$

$\Leftarrow$  Seja  $(y, x) \in S$  e seja  $w = \alpha x + (1-\alpha)y$

$$f(x) \geq f(w) + \nabla f(w)(x-w)$$

$$f(y) \geq f(w) + \nabla f(w)(y-w)$$

$$\Rightarrow \alpha f(x) \geq \alpha f(w) + \nabla f(w) \alpha (x-w)$$

$$(1-\alpha)f(y) \geq (1-\alpha)f(w) + \nabla f(w)(1-\alpha)(y-w)$$

$$\alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \geq f(w) + \nabla f(w)(\alpha x + (1-\alpha)y - w)$$

$$\text{como } w = \alpha x + (1-\alpha)y \Rightarrow$$

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

Proposição 2:  $f$  é convexa  $f \in C^2 \Leftrightarrow \nabla^2 f(x) \succeq 0 \quad \forall x \in S$

( $\Leftarrow$  Taylor

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x)^T (y-x) + \frac{1}{2} (y-x)^T \nabla^2 f(x + \alpha(y-x)) (y-x)$$

Como  $\nabla^2 f(z) \succeq 0$  para todo  $z$  então

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y-x)$$

$\Rightarrow f$  é convexa proposição anterior

$\Rightarrow$ ) Suponhamos que  $\nabla^2 f(x)$  não é Semidefinitiva  $\Rightarrow \exists (y-x)$  tal que

$$(y-x)^T \nabla^2 f(\underbrace{x + \alpha(y-x)}_{\text{ponto interior}}) (y-x) < 0$$

$\Rightarrow f(y) < f(x) + \nabla f(x)^T (y-x) \Rightarrow$   
 não é convexa (contradição)

$$f \text{ é convexa} \Rightarrow \nabla^2 f(x) \succeq 0 \quad \forall x \in S$$

Proposição 3: Se  $f$  é convexa em  $S$  convexo denotado  
 $\Gamma = \{x / f(x) \leq f(y) : y \in S\}$

$\Gamma$  é convexo e  $x$  é mínimo local é mínimo global

Prova:

Se  $f$  não tem mínimo local  $\Gamma = \emptyset$  em consequência (5)

o teorema se cumpre, seja  $c_0$  o valor mínimo

$$\Gamma = \{x \mid f(x) \leq c_0\}$$

$$\text{se } y, z \in \Gamma \Rightarrow f(y) \leq c_0 \text{ e } f(z) \leq c_0 \Rightarrow$$

$$\alpha f(y) \leq \alpha c_0 \text{ e } (1-\alpha) f(z) \leq (1-\alpha) c_0$$

com isto

$$\alpha f(y) + (1-\alpha) f(z) \leq c_0$$

$\Rightarrow$  o conjunto  $\Gamma$  é convexo

(com isto se prova que as curvas de nível

$$\Gamma_c = \{x \mid f(x) \leq c\} \text{ são convexas})$$

Seja  $x^*$  minimizador local e suponhamos que existe  $y$  tal que  $f(x^*) > f(y)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(\alpha y + (1-\alpha)x^*) &\leq \alpha f(y) + (1-\alpha)f(x^*) < \\ &< f(x^*) \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x^*$  não é minimizador local

Proposição 4: Seja  $f \in C^1$  convexa em  $S$  convexo

Se  $\exists x^*$  tal que  $\nabla^2 f(x^*)^T (y - x^*) \geq 0$  para todo  $y \in S$

então  $x^*$  é minimizador local

6

Prova:

$$f(y) \geq f(x^*) + \nabla f(x^*)(y - x^*) \geq f(x^*)$$

Exemplos:

1)  $f$  linear  $f$  é convexa

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = a^T x$$

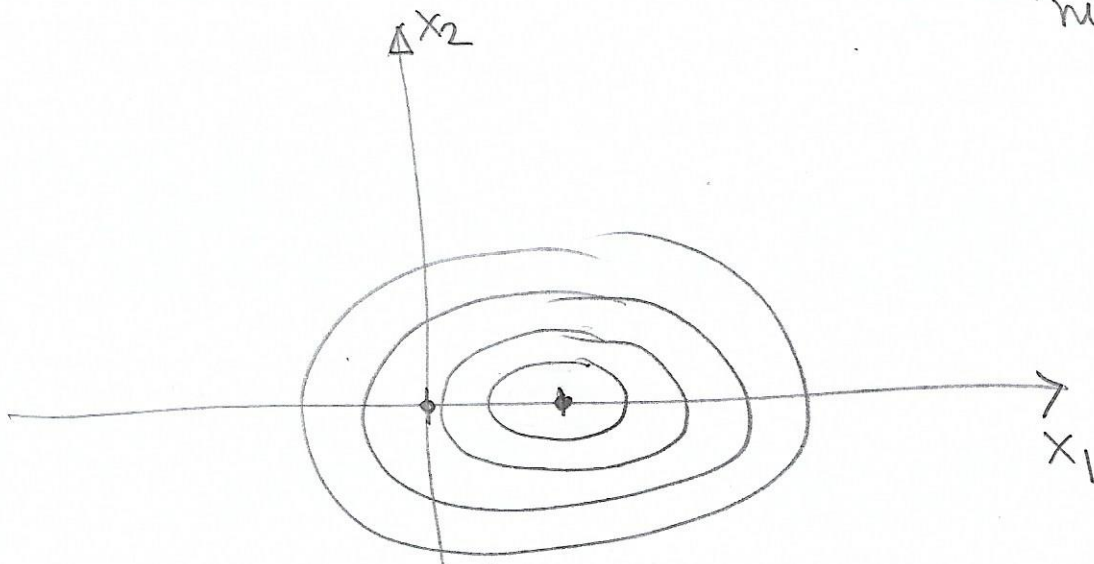
$$\text{com } a = (a_1, \dots, a_n) \text{ e } x = (x_1, \dots, x_n) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} f(\alpha x + (1-\alpha)y) &= a^T(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha a^T x + (1-\alpha)a^T y = \\ &= \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \end{aligned}$$

2) curvas de nível de

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + 4x_2^2$$

curvas de nível



$$(x_1 - 1)^2 + 4x_2^2 = c \Rightarrow c \geq 0$$

$$\frac{(x_1 - 1)^2}{2^2} + \frac{x_2^2}{\frac{1}{4}} = \frac{(\sqrt{c})^2}{2} \quad \text{Elipses}$$

Exercício 3.5

(7)

$$f(y) = \min \{ \|y - x\| / x \in S \}$$

esta função é convexa

Provar para

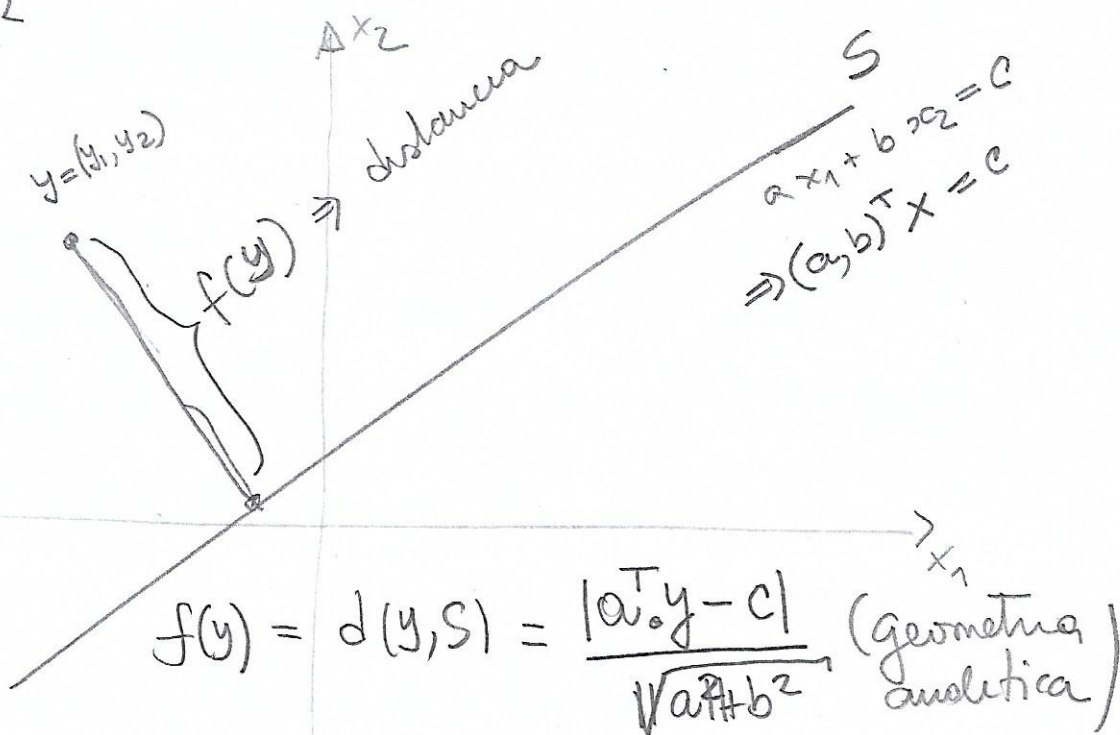
$$S = \{ x \in \mathbb{R}^2 / ax_1 + bx_2 = c \}$$

$f(y)$  é a distância de  $y$  a  $S$  sempre que  
em  $\|y - x\|^2$

é evidente que  $f(y) = 0$  se  $y \in S$

suponhamos que  $y \notin S \Rightarrow$

em  $\mathbb{R}^2$



$$f(\alpha w + (1-\alpha)z) = \frac{|a^T (\alpha w + (1-\alpha)z) - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(8)

$$f(\alpha w + (1-\alpha)z) = \frac{|\alpha a^T w + (1-\alpha)a^T z - \alpha c - (1-\alpha)c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$$

$$= \frac{|\alpha(a^T w - c) + (1-\alpha)(a^T z - c)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$$

$$\leq \frac{\alpha |a^T w - c| + (1-\alpha) |a^T z - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$$

$$= \alpha \frac{|a^T w - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} + (1-\alpha) \frac{|a^T z - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$$

$$= \alpha f(w) + (1-\alpha) f(z) \checkmark$$