

Clase 13/10

Algoritmos para restrições de igualdade

Se não se verifica a condição de Primeira ordem temos que Achar uma direção de descida factível

$$\nabla f(x^k) \neq A^T \lambda$$

$$x^k \in S$$

Achar

d_k tal que

$$\nabla f(x^k)^T d_k < 0$$

e $\exists \delta > 0$ tal que direção fatorial de descida

$$\left. \begin{array}{l} f(x^k + t d^k) < f(x^k) \\ x^k + t d^k \in S \end{array} \right\} t \in (0, \delta)$$

primeiro vamos a verificar que esta direção existe

$$\varphi(z) = f(x^k + Zz) \quad (\text{Problema restrito})$$

$$\nabla \varphi(z) = Z^T \nabla f(x^k + Zz)$$

$$\varphi(0) = f(x^k)$$

$Z = [z_1, \dots, z_n]$
Base do núcleo
de A

$$1^\circ) \nabla \varphi(0) = Z^T \nabla f(x^k) \neq 0$$

Seja $w = -\nabla \varphi(0) = z^T \nabla f(x^u)$
 $\Rightarrow w \in \mathbb{R}^{n-m}$

definimos

$$d = Z w \Rightarrow w \in N_u(A)$$

e

$$\begin{aligned} \nabla f(x^u)^T d &= \nabla f(x^u)^T Z w = \\ &= \nabla f(x^u)^T Z Z^T \nabla f(x^u) = -\underbrace{\|Z^T \nabla f(x^u)\|}_{\neq 0} < 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow d$ é de descida e também
 $x^u + t d \in S$

$\Rightarrow$

$$d = -Z Z^T \nabla f(x^u)$$

é a direção que estamos procurando
 Agora podemos definir um Algoritmo

Notar que para achar d necessitamos
 achar uma base do Núcleo

Algoritmo

$\alpha \in (0, 1)$ x^k ponto fatorial $Ax^k = b$, seja

$Z \in \mathbb{R}^{n-m}$ uma base do Nucleo de A

Os passos para achar x^{k+1} são

Passo 1: se $Z^T \nabla f(x^k) = 0$ parar. (x^k é solução)

Passo 2: calcular $d = -Z Z^T \nabla f(x^k)$

Passo 3: (Busca Linear)

(i) fazer $\lambda = 1$

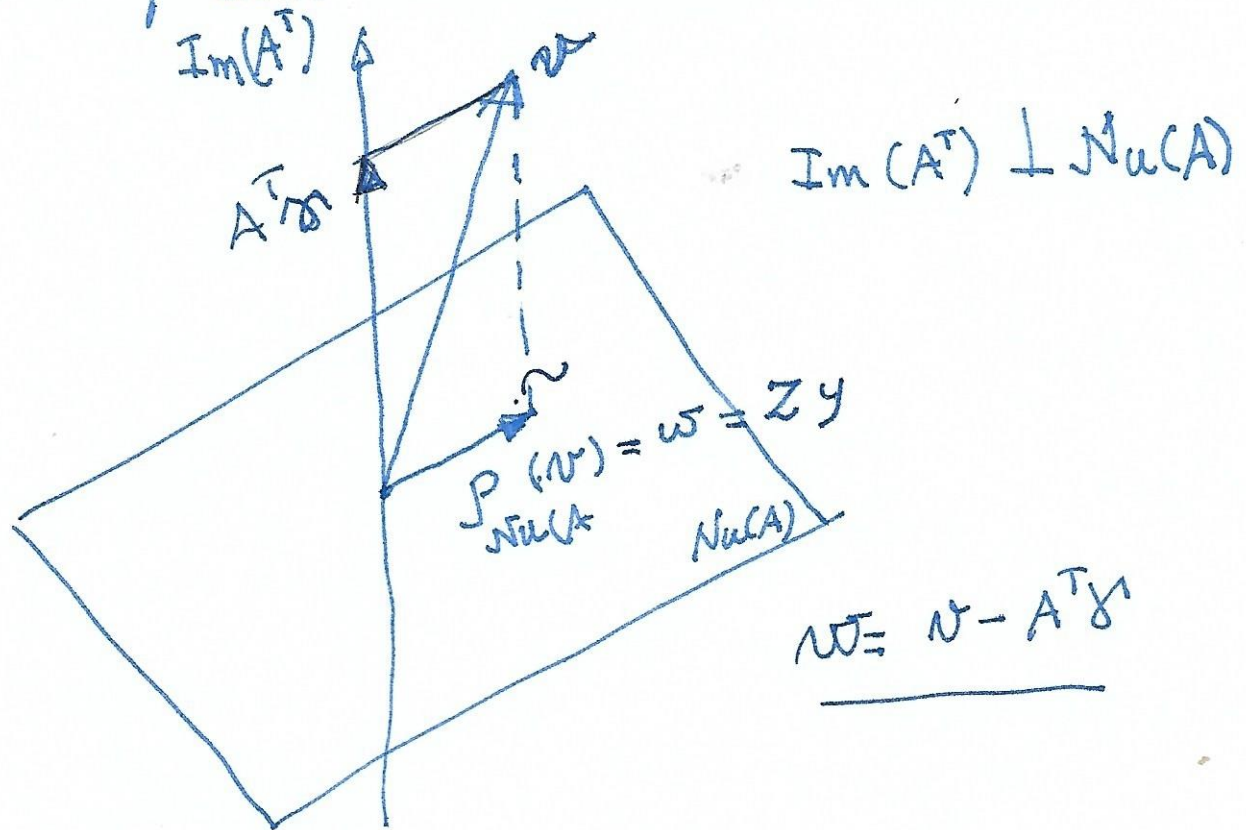
(ii) Se $f(x^k + \lambda d_k) < f(x^k) + \alpha \lambda \nabla f(x^k) d_k$

ou a (iv)

(iii) escolher $\tilde{\lambda} \in [0, 1]$ fazer $\lambda = \tilde{\lambda}$ ir para (ii)

(iv) fazer $\lambda = \tilde{\lambda}$ e $x^{k+1} = x^k + \lambda d_k$

Vamos analisar geometricamente o problema e ver se podemos não calcular o $Nu(A)$



$$(v-w)^T \cdot (Z\gamma) = 0 \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}^{n-m}$$

$$\Rightarrow \gamma^T Z^T (v-w) = 0$$

vamos a achar γ

$$(v - A^T \gamma) \perp \text{Im}(A^T)$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} y^T \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\in \text{Im}(A^T)} A (v - A^T \gamma) = 0 \Rightarrow$$

$$Av - AA^T \gamma = 0$$

$$\text{Como } \text{posto}(A) = AA^T \in \mathbb{R}^{m \times m} \Rightarrow \exists (AA^T) \Rightarrow$$

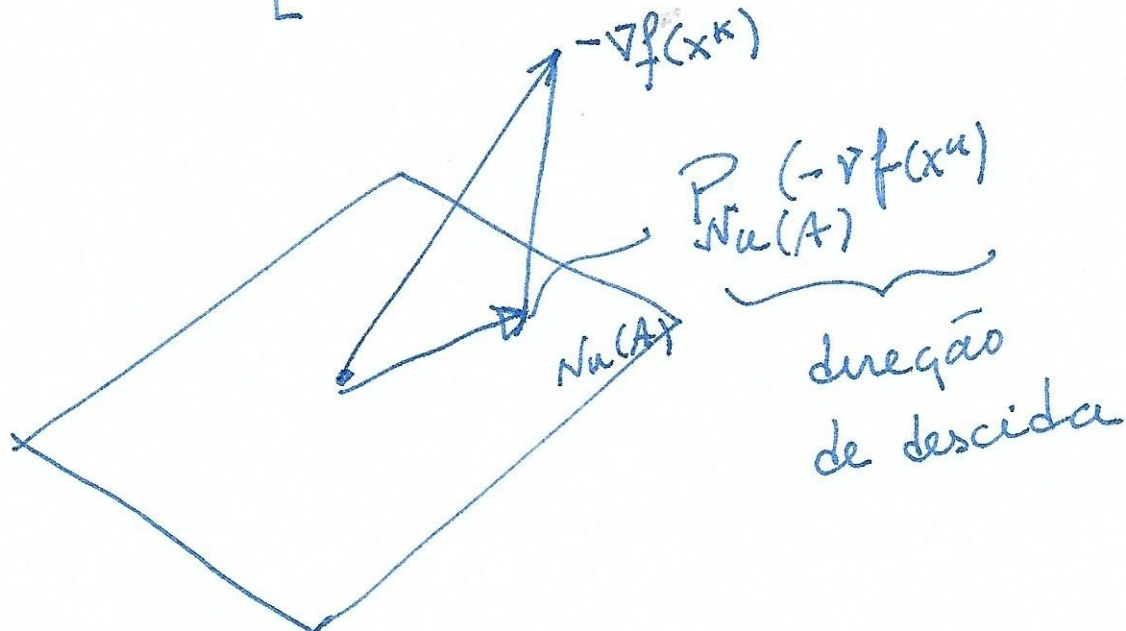
$$\gamma = (AA^T)^{-1} Av$$

$\Rightarrow$

$$P_{N(A)} N = w = N - A^T \gamma =$$

$$= [I - A^T (A A^T)^{-1}] N$$

Agora



$\Rightarrow$

$$d^k = - (I - A^T (A A^T)^{-1}) N \quad (1)$$

veja que

$$Z^T Z^T (N - w) = 0 \Rightarrow$$

$$Z^T (N - Z y) = 0 \Rightarrow y = (Z^T Z)^{-1} Z^T N \Rightarrow$$

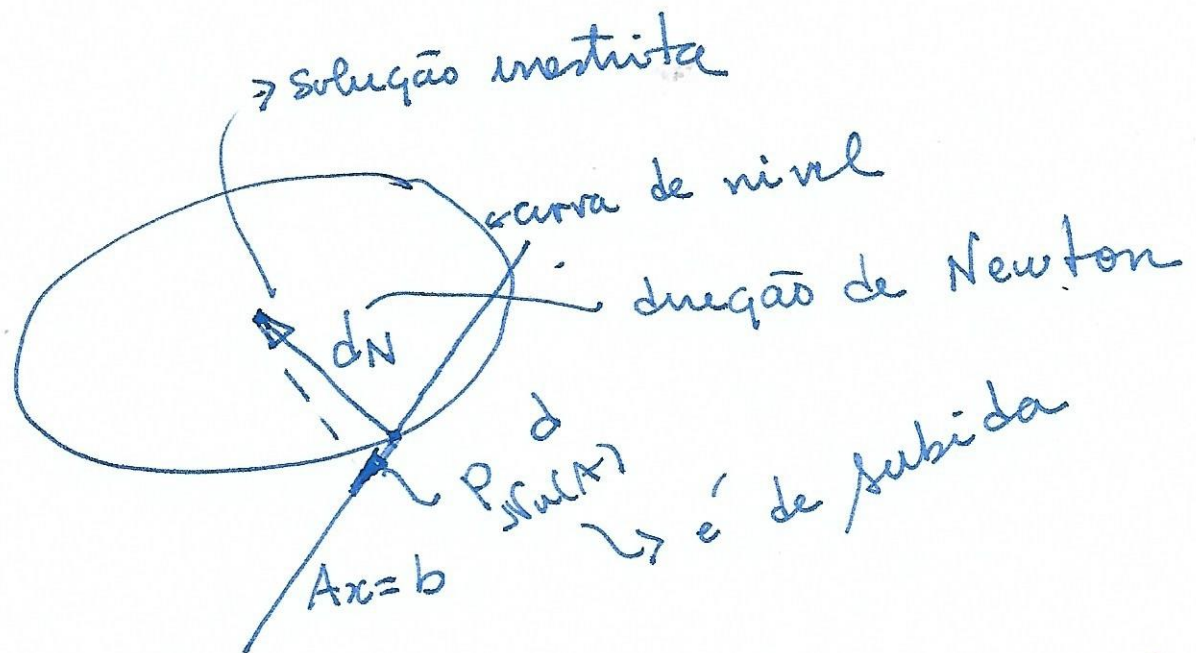
mesma direção

$$d^k = -Z \cdot (Z^T Z)^{-1} Z^T \nabla f(x^k)$$

observamos que $Z^T Z$ é ortogonal $= I \Rightarrow$

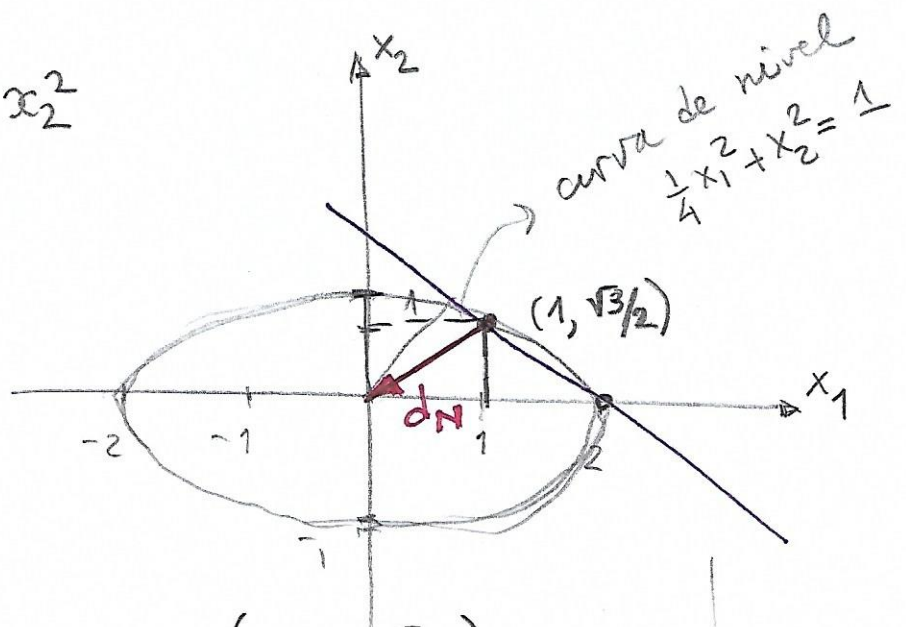
$$d^k = -Z Z^T \nabla f(x^k) \quad \text{que já sabemos}$$

Pergunta dado d de descida para o problema sem restrições $P_{Nu(A)} d$ é de descida



Um exemplo

$$\min \frac{1}{4} x_1^2 + x_2^2$$



Restrição

$$x_1 + \frac{2}{\sqrt{3}} x_2 = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1, \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2$$

$$A x = 2$$

$$d_N = \begin{pmatrix} -1, -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$Nu(A) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}}, -1 \end{pmatrix}$$

$$P_{Nu(A)} d_N = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -1, -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}}, -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left(\frac{4}{3} + 1 \right)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}}, -1 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{14} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}}, -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7}, \frac{\sqrt{3}}{14} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(1, \sqrt{3}/2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \left(P_{N_u(A)} d \right)^T \nabla f(1, \sqrt{3}/2) =$$

$$= \left(-\frac{1}{7}, \frac{\sqrt{3}}{14} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{14} + \frac{9}{14} = \frac{4}{7} > 0$$

não é de descida ✓

Um Exemplo do Método

$$\text{Min } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$\text{Sa } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ponto inicial $x_3 = 2, x_2 = 0, x_1 = 1$

$$x^0 = (1, 0, 2)$$

veja os núcleos

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{matrix}$$

$$\text{Nu}(A) = \{ \lambda(0, -1, 1) \}$$

$$z^T = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad z^T = [0, -1, 1]$$

testamos $x^0 = (1, 0, 2)$

$$\nabla f(x^0) = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$z^T = [0, -1, 1] \cdot \nabla f(x^0) = [0, -1, 1] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \neq 0$$

$$d^0 = -Z Z^T \nabla f(x^0) =$$

$$= - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} [0, -1, 1] \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$f((1, 0, 2) + \lambda(0, 4, -4)) =$$

$$= f(1, 4\lambda, 2 - 4\lambda) =$$

$$= 1^2 + (4\lambda)^2 + (2 - 4\lambda)^2 =$$

$$= 1 + 16\lambda^2 + 4 - 16\lambda + 16\lambda^2 = 32\lambda^2 - 16\lambda + 5$$

$$\Rightarrow 64\lambda - 16 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4} > 0$$

$$\Rightarrow \text{Proximo } x^1 = (1, 1, 1) \checkmark$$

testamos

$$Z^T \nabla f(x^1) = [0, -1, 1] \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \checkmark$$

e' soluçao