4_ Seja $f(x) = \|x\|$ com $x \in \mathbb{R}^n$ considere o problema

$$\text{Min } f(x) = \|x\|$$
$$\text{s.a } Ax = b$$

com $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m < n$ posto$(A) = m$

Prove que a solução $\tilde{x}$ desse problema pode ser escrita como $\tilde{x} = \tilde{A} b$ onde $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $A\tilde{A} = I$

<u>Solução</u> 1) $\text{Min } f(x)$ s.a $Ax = b$ é equivalente a $\text{Min } \frac{1}{2}\|x\|^2$ s.a $Ax = b$

$\Rightarrow$ existe solução do problema $\tilde{x}$

$$\nabla f(\tilde{x}) = \tilde{x} \Rightarrow \nabla f(\tilde{x}) = A^T \lambda$$

$$\tilde{x} = A^T \lambda \Rightarrow A\tilde{x} = AA^T \lambda = b$$

posto$(A) = m$ $\quad AA^T \in \mathbb{R}^{m \times m} \Rightarrow AA^T$ é inversível

$\Rightarrow \lambda = (AA^T)^{-1} b$ $\quad$ chamando $A^T(AA^T)^{-1} = \tilde{A}$

$$\tilde{x} = A^T(AA^T)^{-1} b = \tilde{A} b$$

$$\Rightarrow A\tilde{A} = (AA^T)(AA^T)^{-1} = I$$

9_ Considere o problema quadrático

$$\text{Min } \frac{1}{2} x^T Q x - c^T x \quad \text{s.a } Ax = b \qquad (1)$$

onde $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é simétrica, $c \in \mathbb{R}^n$ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $b \in \mathbb{R}^n$

Provar que x é um minimizador local $\Leftrightarrow$ x é minimizador global

$\Rightarrow$ x é minimizador local

dado y fatível ie $Ay = b$, $Ax = b \Rightarrow A(y-x) = 0 \Rightarrow$

$y - x \in Nu(A)$

fazemos o desenvolvimento de Taylor em x para y fatível

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x)^T (y-x) + \frac{1}{2}(y-x)^T Q (y-x)$$

como x é minimizador local

$\nabla f(x) \perp d$ para toda $d \in Nu(A)$

$\Rightarrow$ $\nabla f(x)^T (y-x) = 0$ para todo y fatível com

$y - x \in B(x,\varepsilon) \cap Nu(A) \Rightarrow$

$$0 \leq f(y) - f(x) \leq \frac{1}{2}(y-x)^T Q (y-x) \Longrightarrow$$

$Q \geq 0$ no nucleo de (A)

dado qualquer y factible

$$f(y) - f(x) = \cancel{\nabla f(x)^T \underbrace{(y-x)}_{Nu(A)}}^{0} + \frac{1}{2}(y-x)^T Q (y-x) \geq 0$$

$\Rightarrow$ $f(y) \geq f(x)$ para todo y fatível

$\Rightarrow$ x é minimizador global. —

12 _ Seja $z^1 = (1,-1,2)^T$, Escolher z^2 tal que z^1 e z^2 são LI, seja $Z = [z^1\, z^2] \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ uma base do $Nu(A)$ com $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

(a) determinar m e n

(b) Derterminar uma matri A, e única?

(c) Ache a variedade afim paralela ao $Nu(A)$ que passa p $(2,5,1)^T$

(d) se S é a variedade de (c) $\tilde{x}$ é a solução de

$$\text{Min } f(x) \quad \text{s.a} \quad x \in S$$ (4)

qual é a relação entre Z e f no ponto

Seja $z^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ver que $z^2 \neq 0$ e $\langle z^1, z^2 \rangle = 0 \Rightarrow z^1$ e z^2 são LI

com z^1 e $z^2 \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow n = 3$

Agora sabemos que existe uma única direção salvo cte $\neq 0$ que es ortogonal a z^1 e z^2 respectivamente

$$\hat{d} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 2K = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

chamamos $d = (-1, 1, 1)^T$
entonces podemos definir A como

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \cdot d \\ \alpha_2 \, d \\ \vdots \\ \alpha_m \, d \end{bmatrix}$$

com $(\alpha_1, \dots \alpha_m) \neq 0$
Esta matriz tiene como base del nucleo z^1 e z^2

$\Rightarrow$ A não é unica
Escolhemos A de posto completo e $\alpha_1 = 1 \Rightarrow$

$$A = [-1 \ 1 \ 1]$$

(c) la variedade Linear Affim paralela al nucleo de A que passa por $(2, 5, 1)^T$ é

$$(2\ 5\ 1) + \alpha(1, -1, 2) + \beta(1, 1, 0) =$$
$$= (2 + \alpha + \beta,\ 5 - \alpha + \beta,\ 1 + 2\alpha) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

tiene dimensão 2

(d) Sabemos que se $\tilde{x}$ é otimo: $\nabla f(\tilde{x}) \perp Nu(A) \Rightarrow \nabla f(\tilde{x}) \in Im(A^T) \Rightarrow \exists \alpha$ tq

$$\nabla f(\tilde{x}) = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5_ Seja B simétrica, dizemos $B \succeq 0$ em $Nu(A)$ se $z^T B z \geq 0 \quad \forall z \in Nu(A)$ e que $B \succ 0$ no nucleo de A

Se $z^T B z > 0 \quad \forall z \in Nu(A) \quad z \neq 0$

(a) Prove que se $\exists r \in \mathbb{R}$ tal que $B + r A^T A \succ 0 \Rightarrow B \succ 0$ em $Nu(A)$

existe r tal que $d^T(B + r A^T A) d > 0 \quad \forall d \neq 0 \Rightarrow$

se $d \in Nu(A) \Rightarrow 0 < d^T(B + r A^T A) d = d^T B d \quad \forall d \neq 0 \Rightarrow$

$B \succ 0$ no nucleo de A

(b) Prove que se $\exists r \in \mathbb{R}$ tal que $B + r A^T A \succeq 0 \Rightarrow$ $B \succeq 0$ em $Nu(A)$

existe r tal que $d^T(B + r A^T A) d \geq 0 \quad \forall d \Rightarrow$

se $d \in Nu(A) \Rightarrow$

$$0 \leq d^T(B + r A^T A) d = d^T B d + \underbrace{r\|Ad\|^2}_{=0} = d^T B d$$

$\Rightarrow B \succeq 0$ no $Nu(A)$

(c) Prove que se $B \succ 0$ no nucleo de $A \Rightarrow$ $\exists r \in \mathbb{R}$ tal que $B + r A^T A \succ 0$

Vamos a supor que r no existe. entonces para cada r_k $\quad r_k \to \infty$ existe d_k com $\|d_k\| = 1$

$d_k^T(B + r_k A^T A) d_k \leq 0 \qquad d_k^T B d_k \leq -r_k \|Ad_k\|^2 \Rightarrow$

sabem que d_k tiene una subsequencia convergente

entonces $d_{k_j} \to \bar{d} \Rightarrow \quad \bar{d}^T B \bar{d} \leq 0 \Rightarrow$ contradição

Com $\|\bar{d}\| = 1$ como r_k --> infinito e $\bar{d}^T B \bar{d}$ é finito, $A\bar{d}$ pertece ao nucleo de A

porque $B \succ 0$. $\Rightarrow r$ existe

(d) a través de un ejemplo muestre que la recíproca de (b) no es verdadera.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = (0, 1) \qquad \mathcal{N}u(A) = \{\lambda(1,0)$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B + r \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1+r \end{pmatrix}$$

$$(1, 0) \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \geq 0$$

$B \succeq 0$ no $\mathcal{N}u(A)$

$$B + r \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1+r \end{pmatrix} \qquad \det(B + r A^T A) = -9 \Rightarrow$$

$$B + r \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \not\succeq 0 \text{ para } \forall r \geq 0$$