

Solução da Prova I

(Obs: Cada setinha (✓) vale 0,1.)

1. Domínio de $f(x)$: $x^2 - 1 \geq 0$ ✓ $\Rightarrow (x - 1)(x + 1) \geq 0$

	-1	1	
$x - 1$	-	-	+
$x + 1$	-	+	+
$(x - 1)(x + 1)$	+ ✓	- ✓	+ ✓

$$\Rightarrow \text{Dom}(f) = (-\infty, -1] \text{ ✓ } \cup [1, +\infty) \text{ ✓ } \text{ e } \\ \text{Im}(f) = [0, +\infty) \text{ ✓}$$

$$f'(x) = \frac{2x \text{ ✓}}{2\sqrt{x^2 - 1} \text{ ✓}} = \frac{x \text{ ✓}}{\sqrt{x^2 - 1} \text{ ✓}} \Rightarrow \text{Dom}(f') = (-\infty, -1) \text{ ✓ } \cup (1, +\infty) \text{ ✓ } \text{ e } \\ \text{Im}(f') = (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \text{ ✓}$$

2. (a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 5}{x - 4} = \frac{4 \text{ ✓} - 6 \text{ ✓} + 5 \text{ ✓}}{2 \text{ ✓} - 4 \text{ ✓}} = -\frac{3}{2} \text{ ✓}$

(b) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta}{\sin 2\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \frac{1}{\sin(2\theta)} \text{ ✓} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin \theta}{\theta} \text{ ✓} \nearrow 1 \text{ ✓}}{\cos \theta} \frac{1}{\frac{\sin(2\theta)}{2\theta} \text{ ✓} \searrow 1 \text{ ✓}} = \frac{1}{2} \text{ ✓}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{(\sqrt{x^2 + 8x} - x)}_{(\text{"}\infty - \infty\text{"} \text{ ✓})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 8x} - x)(\sqrt{x^2 + 8x} + x)}{(\sqrt{x^2 + 8x} + x)} \text{ ✓}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x \text{ ✓}}{\sqrt{x^2 + 8x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x}{x \text{ ✓} \sqrt{1 + \frac{8}{x} \text{ ✓}} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 \text{ ✓}}{\sqrt{1 + \frac{8}{x} \text{ ✓}} + 1} = 4 \text{ ✓}$

3. A função f é contínua em $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ por que nestes intervalos ela é dada por um polinômio. ✓ Logo, para que f seja contínua nos reais, precisamos garantir continuidade em $x = 2$.

Para que a função $f(x)$ seja contínua em $x = 2$, temos que ter

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \text{ ✓}$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + x + 8) \text{ ✓} = 4 \text{ ✓} + 2 \text{ ✓} + 8 \text{ ✓} = 14 \text{ ✓}$. Como $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$, então $f(2) = 14$. Portanto, $b = 14 \text{ ✓}$. Por outro lado, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 14 \text{ ✓}$, ou seja, $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x + a) = 14 \text{ ✓} \Rightarrow 2 + a = 14 \text{ ✓}$. Logo, $a = 12 \text{ ✓}$.

4. (a) $f'(x) = 15x^4 \text{ ✓} - 16x \text{ ✓} + 0 \text{ ✓} + 3e^x \text{ ✓} + \sin(x) \text{ ✓}$

(b) $g'(x) = 2x \text{ ✓} \cdot \sin x \text{ ✓} + x^2 \text{ ✓} \cdot \cos x \text{ ✓} = x(2 \sin x + x \cos x) \text{ ✓}$

(c) $h'(x) = \frac{\sec^2 x \text{ ✓} x \text{ ✓} - \tan x \text{ ✓} \cdot 1 \text{ ✓}}{x^2 \text{ ✓}} = \frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x} \text{ ✓}$

(d) $k'(x) = (4x \text{ ✓} + 0 \text{ ✓})e^{2x^2 + 1} \text{ ✓} = 4xe^{2x^2 + 1} \text{ ✓}$

(e) $m'(x) = \frac{[2 \text{ ✓} \cdot \cos(4x^2) \text{ ✓} - \text{ ✓} 2x \text{ ✓} \cdot 8x \text{ ✓} \sin(4x^2) \text{ ✓}]e^{3x \text{ ✓}} - 2x \cos(4x^2) \text{ ✓} \cdot 3 \text{ ✓} e^{3x \text{ ✓}}}{(e^{3x})^2 \text{ ✓}}$
 $= \frac{[(2 - 6x) \cdot \cos(4x^2) - 16x \sin(4x^2)]}{e^{3x}} \text{ ✓}$

5. (a) $e^{-1} \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \checkmark = 0 \checkmark \neq 13$ (não ok, não pertence a curva $\checkmark$)

(b) $e^0 \cdot 2 + 2^3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \checkmark = 2 + 8 + 3 \checkmark = 13$ (ok, pertence a curva $\checkmark$)

$$e^{x-1} \checkmark \cdot y \checkmark + e^{x-1} \checkmark \cdot y' \checkmark + 3y^2 \checkmark y' \checkmark x \checkmark + y^3 \checkmark + 3 \checkmark = 0$$

$$y'(e^{x-1} + 3xy^2) = -e^{x-1}y - y^3 - 3 \checkmark$$

$$y' = -\frac{e^{x-1}y + y^3 + 3}{e^{x-1} + 3xy^2} \checkmark$$

Para o ponto $(1,2)$, temos: $y' = -\frac{2+8+3}{1+12} \checkmark = -\frac{13}{13} = -1 \checkmark$

A reta tangente: $y - 2 = -1(x - 1) \checkmark \Rightarrow y = -x + 1 + 2 \checkmark \Rightarrow y = -x + 3 \checkmark$