IMECC/Unicamp – Programa de Pós-Graduação em Matemática
Exame de Qualificação ao Mestrado
Disciplina: MM720 - Análise no $\mathbb{R}^n$

Nome: ____

1. (a) (0,2 pontos) Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $p \in U$. Defina diferenciabilidade de f em p.
   (b) (1,8 pontos) Para quais valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ a função
$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1 + x^2y^4z^6)}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha} & , \quad (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0 & , \quad (x,y,z) = (0,0,0), \end{cases}$$
   é diferenciável? Para quais ela não é?

2. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1.
   (a) (0,3 pontos) Quando f é uma imersão? Quando f é uma submersão? Dê exemplos.
   (b) (0,7 pontos) Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y,z) = (x+y+z, x^2+y^2+z^2, x^3+y^3+z^3)$. Descreva o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^3$ onde f tem posto constante igual a 3.
   (c) (1,0 pontos) Suponha que f tem posto constante. Mostre que f é localmente injetiva se, e só se, é uma imersão.

3. (2,0 pontos) Seja U um aberto simplesmente conexo de $\mathbb{R}^2$ e considere o sistema de equações diferenciais
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) &= f(x(t), y(t)), \\ \dfrac{d}{dt}y(t) &= g(x(t), y(t)), \end{cases} \tag{1}$$
   onde f, g são de classe C^1 em U. Suponha que $f_x(x,y) + g_y(x,y)$ não muda de sinal em U. Mostre que não existem soluções periódicas (contidas em U) para o sistema (1). Dê um exemplo deste fato, usando f, g funções não-lineares.
   Dica: *Suponha, por absurdo, que exista uma solução periódica $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ (ou seja, γ é uma curva fechada). Seja R a região interior à curva γ. Aplique o Teorema de Green.*

4. (a) (0,8 pontos) Calcule $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(\theta)\cos(\phi)\operatorname{sen}(\phi)\, d\theta\, d\phi$.
   (b) (1,2 pontos) Seja $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^4$ é o toro descrito por
$$\mathbb{T}^2 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4;\ x^2+y^2 = z^2+w^2 = 1\}.$$
   Calcule $\displaystyle\int_{\mathbb{T}^2} xyz\, dw \wedge dy$.

5. (a) (0,4 pontos) Enuncie o Teorema da Função Inversa e o Teorema da Função Implícita.
   (b) (0,6 pontos) É verdade que se uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^2 é localmente invertível em p, para cada $p \in \mathbb{R}^2$, então ela é bijetora? Mostre ou dê um contra-exemplo.
   (c) (1,0 pontos) Mostre que o sistema
$$\begin{cases} w^2 + 2x^2 + y^2 - z^2 - 6 &= 0, \\ wxy - xyz &= 0, \end{cases}$$
   pode ser resolvido em termos de $w = w(y,z)$ e $x = x(y,z)$ numa vizinhança do ponto $(x,y,z,w) = (1,2,1,1)$. Calcule as derivadas parciais de w e x nestes pontos.

Justifique todas as suas respostas. Boa prova!

Qualificação 2017 Mestrado - Topologia Geral

Nome:

RA:

Exercício 1

Seja $\mathcal{B}$ o conjunto dos intervalos $[a, b) \subset \mathbb{R}$

(a) Demonstrar que $\mathcal{B}$ é base para uma topologia $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{R}$.

Considere como X o espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ e com Y a reta real com a usual topologia euclidiana.

(b) Demonstrar que a aplicação identidade de $\mathbb{R}$ fornece uma aplicação continua $\alpha : X \to Y$, mas a inversa de α não é continua.

(c) Achar todas as componentes conexas de X

(d) Demonstrar que não existe uma base numerável pela topologia $\mathcal{A}$

Exercício 2

Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

- $C = \{(x, y) \,:\, x^2 + y^2 = 1\}$
- $D = \{(x, y) \,:\, x^2 + y^2 < 1\}$
- $F = \{(x, y) \,:\, x^2 + y^2 > 1\}$

Para cada um dos espaços topológicos seguintes, dizer se for de Haussdorff, compacto, conexo ou conexo por caminhos, justificando a sua resposta

(a) $X = \mathbb{R}^2/C$

(b) $Y = \mathbb{R}^2/(C \cup F)$

(c) $W = \mathbb{R}^2/F$

(d) $Z = ((C \cup F) \times \{0\}) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D \times \left\{\frac{1}{n}\right\}\right) \subset \mathbb{R}^3$

Exercício 3

Demonstrar que todo espaço conexo por caminhos é conexo, mas não todo espaço conexo é conexo por caminhos.

Definir o conceito de *Grupo Fundamental* e explicar porque não è possível descrever ele sem a escolha de um ponto base.

Demonstrar que se X é um espaço conexo por caminhos, os grupos fundamentais $\pi(X, x)$ e $\pi(X, y)$ são grupos isomorfos para toda escolha de pontos $x, y \in X$

Sabem dizer porque o resultado anterior não é verdadeiro se X é conexo, mas não por caminhos?

Demonstrar que se X e Y são dois espaços conexos por caminhos, o grupo fundamental do produto $X \times Y$ é isomorfo ao produto direto dos grupos fundamentais de X e Y.

Calcular, explicitando todos os detalhes, o grupo fundamental do círculo, e deduzir o grupo fundamental do torus.

Enunciar e demonstrar o Teorema do ponto fixo de Brouwer no plano

Exercício 4

Definir o conceito de *espaço de Hausdorff*

Seja Y o espaço quociente de um espaço topológico X relativo a uma aplicação continua $f : X \to Y$. Demonstrar que se X é compacto e de Hausdorff e f é fechada, então Y é compacto e de Hausdorff.