Qualificação 2017 Doutorado - Topologia Algébrica

Nome:

RA:

Exercício 1

Considere as duas imagens abaixo. A imagem da esquerda define uma garrafa de Klein K e a

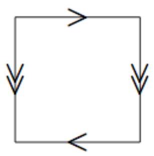

imagem da direita representa o subespaço $X \subset \mathbb{R}^3$ da garrafa de Klein que se auto-interseca num círculo.

1. desenhar no quadrado a curva γ que corresponde à auto-interseção da X
2. definir uma estrutura de CW-complexo para K e para X
3. demostrar que X é homotopicamente equivalente a $S^1 \vee S^1 \vee S^2$

Enunciar o teorema de Van Kampen.

Lembrem que como consequência temos que o grupo fundamental de um CW-complexo X com uma única 0-célula x_0 admite uma apresentação $< S \mid R >$ onde S é o conjunto de 1-células de X e R é parametrizado pelo conjunto das 2-células.

Determinar os grupos fundamentais de K e X.

Exercício 2

Demonstre o seguinte criterion de lifting

Teorema 1. *Suponhamos de ter un recobrimento* $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ *e um mapa* $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ *com* Y *conexa por caminhos e localmente conexa por caminhos. Então existe um levantamento* $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ *de* f *se e somente se* $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$

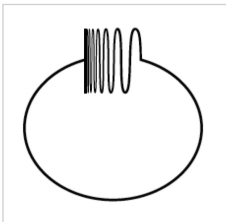

Figura 1: Quasi-círculo

Seja Y um *quasi-círculo* como na imagem, um conjunto fechado de $\mathbb{R}^2$ que consiste em uma porção do grafo de $y = \sin(1/x)$, o segmento $[-1, 1]$ no eixo da y e um arco conectando as duas peças. Colapsando o segmento de Y no eixo da y em um ponto, obtemos um mapa quociente $f : Y \to S^1$. Demonstre que f não levanta a um espaço de recobrimento $\mathbb{R} \to S^1$, mesmo sendo $\pi_1(Y) = 0$. Isso demonstra a necessariedade da hipotese de local conexidade por caminhos no enunciado anterior.

Exercício 3

Definir e explicar a sequência de Mayer-Vietoris e usá-la para calcular os grupo de homologia de S^n por indução.

Exercício 4

Usando os produtos cup, demonstrar que toda aplicação $S^{k+l} \to S^k \times S^l$ induz homomorfismos triviais $H^{k+l}(S^{k+l}) \to H^{k+l}(S^k \times S^l)$. Enunciar a formula de Kunneth usada para resolver o exercício.

Exercício 5

Seja $p : X \to Y$ um recobrimento, e seja $x_0 \in X$ tal que $y_0 = p(x_0)$.
Sabemos que $p_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ é injetora. É verdade que $p_* : H_1(X) \to H_1(Y)$ é injetora também?