Exame de Qualificação, Mestrado
Álgebra Linear, 28 de julho de 2017

1. Seja $V = M_n(F)$ o espaço vetorial das matrizes $n \times n$ sobre os complexos, definimos $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ o traço de $A \in V$.

a) (0,5 pt) Mostrar que $tr: V \to F$ é um elemento do espaço dual V^* de V. Mostrar que ainda $tr(AB) = tr(BA)$ para quaisquer A, $B \in V$.

b) (1 pt) Se $f \in V^*$ satisfaz $f(AB) = f(BA)$ para quaisquer A, $B \in V$, mostrar que f e tr são linearmente dependentes em V^*.

c) (0,75 pt) Mostrar que $g(A, B) = tr(AB)$ é uma forma bilinear e simétrica em V. Ela é degenerada?

d) (0,75 pt) Seja $e_1, e_2, \ldots, e_k$ ($k = n^2$) uma base de V e seja $u_1, u_2, \ldots, u_k$ a base dual em relação a g (isto é, $g(e_i, u_j) = 0$ se $i \neq j$ e $g(e_i, e_i) = 1$). Mostrar que para toda matriz $A \in V$ vale $\sum_{i=1}^{k} e_i A u_i = tr(A) \cdot I_n$. (Dica: Mostrar primeiro a afirmação quando a primeira base de V consiste das matrizes E_{ij}, e depois fazer a mudança da base. Como vai alterar a base dual da primeira base?)

2. Seja T uma transformação linear no espaço vetorial $V = \mathbb{C}^4$, e suponha que na base canônica ela tem matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 9 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) (1 pt) Encontrar a forma canônica de Jordan J da matriz A.

b) (1 pt) Encontrar uma base de V onde a matriz de T seja igual a J.

3. Uma transformação linear $P: V \to V$ no espaço vetorial V é projeção se $P^2 = P$; uma transformação linear $S: V \to V$ em V é involução se $S^2 = Id$, a identidade.

a) (0,5 pt) Assumindo o corpo F tal que $1 \neq -1$, mostrar que P é projeção se, e somente se $S = Id - 2P$ é uma involução.

b) (1 pt) Mostrar que se P é uma projeção em V então existe uma base de V que consiste de autovetores de P. (A dimensão de V não precisa ser finita!)

c) (1 pt) Seja $\dim V = \infty$. Para todo número natural k, mostrar que existem P_1, P_2, $\ldots$, P_k, projeções em V, tais que $P_i P_j = P_j P_i$ para quaisquer i e j.

4. Seja V um espaço vetorial real com produto interno e sejam $a_1, a_2, \ldots, a_k \in V$, o determinante de Gram $\Gamma(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ é o determinante da matriz $k \times k$ que tem na entrada (i, j) o produto interno (a_i, a_j).

a) (1 pt) Mostrar que $\Gamma(a_1, a_2, \ldots, a_k) \geq 0$, com igualdade se e somente se os vetores a_1, a_2, $\ldots$, a_k são linearmente dependentes.

b) (0,5 pt) Mostrar que $\Gamma(a_1, a_2, \ldots, a_k) \leq |a_1|^2 |a_2|^2 \cdots |a_k|^2$. Quais são os casos onde tem-se igualdade?

5. (1 pt) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Mostrar que existe uma única transformação linear $f: V^* \otimes V \to End(V)$ tal que $f(g \otimes v)(x) = g(x)v$ para quaisquer $g \in V^*$ e $v, x \in V$. A transformação f é um isomorfismo? (Justificar!)

EXAME DE QUALIFICAÇÃO - MESTRADO
MM453 - TOPOLOGIA GERAL
26/07/2017

Nome: **RA:**

Incluir na prova todas as contas feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Bom Trabalho!

Escolha 5 das 7 questões abaixo.

Questão 1. Seja X um espaço de Hausdorff. Mostre que se K_1 e K_2 são compactos disjuntos em X, então existem U e V abertos disjuntos de X tais que $K_1 \subset U$ e $K_2 \in V$.

Questão 2. Sejam X e Y espaços topológicos não vazios, com Y Hausdorff. E sejam f, $g : X \to Y$ funções contínuas.
a) Mostre que o conjunto $\{x \in X \ : \ f(x) = g(x)\}$ é fechado em X.
b) Mostre que se $f(x) = g(x)$ em um subconjunto D denso em X, então $f(x) = g(x)$ em X.
c) Mostre que se X é conexo, então $f(X)$ é conexo.
d) Mostre que a imagem de cada componente conexa de X por f está contida em uma componente conexa de Y.

Questão 3. Prove o Teorema de Tychonoff: O produto de espaços topológicos compactos é um espaço topológico compacto.

Questão 4. Sejam X um espaço topológico e $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede em X. Para cada $\lambda \in \Lambda$ seja $\mathcal{B}_\lambda = \{x_\mu \ : \ \mu \geq \lambda\}$ e seja $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_\lambda \ : \ \lambda \in \Lambda\}$.
a) Mostre que $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em X.
b) Mostre que $x_\lambda \to x$ se, e somente se, $\mathcal{B} \to x$.

Questão 5. Seja $O(n)$, $n \geq 2$, o conjunto das matrizes A de dimensão $n \times n$ tais que $AA^t = A^tA = I$. Considere $O(n)$ como subespaço topológico de $\mathbb{R}^{n^2}$. Mostre que $O(n)$ é compacto e desconexo.

Questão 6. Seja $f : [0,1] \to S^n$, $n \geq 2$, um laço em $x_0 \in S^n$. Assuma que f é homotópico a um laço $g : [0,1] \to S^n$ em x_0 que não é sobrejetor e prove que $\pi_1(S^n) = \{0\}$, para $n \geq 2$.

Questão 7. Mostre que $\pi_1(S^2) = 0$, $\pi_1(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}_2$ e que $\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$.

IMECC/Unicamp – Programa de Pós-Graduação em Matemática
Exame de Qualificação ao Mestrado
Prova 1: MM720 - Análise no $\mathbb{R}^n$ (24/07/2017)

Nome e RA: ____

1. Prove o Lema de Morse: Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável de classe C^∞ e seja $p \in U$ um ponto crítico não-degenerado de f com $f(p) = 0$. Mostre que existe uma carta local ϕ em torno de p tal que
$$(f \circ \phi^{-1})(x) = -x_1^2 - \ldots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \ldots + x_n^2,$$
onde λ é o índice do ponto crítico, ou seja, a dimensão máxima do subespaço onde a restrição da hessiana é negativa-definida.

2. Seja $GL(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das matrizes $n \times n$ invertíveis.
   (a) Mostre que $GL(\mathbb{R}^n)$ é aberto em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.
   (b) Mostre que a aplicação $f : GL(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ dada por $f(X) = X^{-1}$ é diferenciável e calcule $f'(X)$.
   (c) Se $n = 2$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, exiba a matriz 2×2 dada por $F'(A)(A)$.

3. Seja $U \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ um conjunto aberto. Mostre que $\det : U \to \mathbb{R}$ é uma submersão se, e só se, nenhuma matriz em U tem posto menor ou igual a $n - 2$.

4. Considere a 2-forma em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0\}$ dada por
$$\omega = \frac{x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$
   (a) ω é fechada?
   (b) Mostre que $\displaystyle\int_{S^2} \omega = -4\pi$.
   (c) ω é exata?

5. (a) Enuncie o Teorema da Função Inversa e o Teorema da Função Implícita.
   (b) Mostre que o sistema
$$\begin{cases} x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 & = & 0, \\ 2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 & = & 0, \end{cases}$$
   pode ser resolvido em termos de $u = u(x,y)$ e $v = v(x,y)$ numa vizinhança do ponto $(x,y,u,v) = (2,-1,2,1)$. Calcule as derivadas parciais de u e v nestes pontos.

Justifique todas as suas respostas. Boa prova!