MM439 - 1S 2012 - Exame de Qualificação

Nome: ______________________________ RA: __________ 11/07/2012

Em todas as questões os espaços vetoriais (em particular as álgebras) tem dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de caractrística zero. A seguinte notação é usada no caso de uma álgebra semissimples $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{h}$ (subálgebra de Cartan), Π (sistema de raízes), Σ (conjunto de raízes simples), Π^+ (raízes positivas), $\mathfrak{g}_\alpha$ (espaço da raiz α), $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (forma de Cartan-Killing).

Escolha questões cujo total de pontos possíveis seja 100. Bom trabalho!

1. (10pts) Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2 \subset \mathfrak{g}$ ideais de $\mathfrak{g}$. Mostre que se $\mathfrak{i}_1$ e $\mathfrak{i}_2$ são nilpotentes então $\mathfrak{i}_1 + \mathfrak{i}_2$ também é nilpotente.

2. Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra semissimples e suponha dados, para cada $\alpha \in \Pi$, um vetor $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $X_\alpha \neq 0$ tal que $\langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle = 1$. Mostre:
   (a) (04pts) Para cada par de raízes α, β com $\alpha \neq -\beta$, existe escalar $m_{\alpha,\beta}$ tal que $[X_\alpha, X_\beta] = m_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}$, onde $X_{\alpha+\beta} = 0$ se $\alpha + \beta$ não é raiz.
   (b) (06pts) Se α, β, γ são raízes com $\alpha + \beta + \gamma = 0$, então $m_{\alpha,\beta} = m_{\beta,\gamma} = m_{\gamma,\alpha}$.

3. (05pts) Escreva a definição de álgebra de Lie livre.

4. (10pts) Suponha que $\mathfrak{g}$ seja uma álgebra de Lie simples. Mostre que $\mathfrak{g}$ é gerada por dois elementos.

5. Considere o sistema de raízes de tipo C_3.
   (a) (12pts) Reconstrua o sistema de raízes a partir de seu diagrama de Dynkin.
   (b) (06pts) Qual o comprimento do elemento mais longo do grupo de Weyl?

6. (10pts) Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ uma derivação de $\mathfrak{g}$. Suponha que $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ sejam os auto-valores de D, cujos auto-espaços generalizados são denotados por $\mathfrak{g}_{\lambda_1}, \ldots, \mathfrak{g}_{\lambda_s}$. Mostre que se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$ então $\langle \mathfrak{g}_{\lambda_i}, \mathfrak{g}_{\lambda_j} \rangle = 0$ a menos que $\lambda_1 + \lambda_j = 0$.

7. (10pts) Seja w_0 o elemento mais longo do grupo de Weyl de uma álgebra de Lie simples. Escreva $w_0 = r_{\alpha_i} \cdots r_{\alpha_k}$ como produto de reflexões em relação às raízes simples. Mostre que todas as raízes simples aparecem pelo menos uma vez nesse produto.

8. Suponha que $\mathfrak{g}$ seja uma álgebra de Lie semissimples.
   (a) (10pts) Escreva a definição de peso de uma representação de $\mathfrak{g}$ e justifique a validade da seguinte afirmação: toda representação de dimensão finita de $\mathfrak{g}$ é soma direta de seus espaços de peso.
   (b) (10pts) Mostre que toda representação irredutível de dimensão finita de $\mathfrak{g}$ é gerada por um vetor de peso máximo.

9. Determine se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa.
   (a) (06pts) Toda derivação de uma álgebra de Lie semissimples é uma derivação interna (isto é, da forma $\mathrm{ad}(x)$ para algum elemento x).
   (b) (06pts) Toda representação de dimensão finita de uma álgebra de Lie solúvel é completamente redutível.
   (c) (06pts) Se V é uma representação gerada por um único vetor, então V é irredutível.
   (d) (06pts) A álgebra de Lie de tipo E_7 possui subálgebra isomorfa a $\mathfrak{so}(10) \times \mathfrak{sl}(2)$.

Exame de Qualificação do Doutorado

16/07/2012

RA......................Nome..

Ao resolver cada questão, enuncie os resultados utilizados.

1. Sejam E e F espaços normados, com F completo. Seja $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathcal{L}(E; F)$ tal que:

(i) existe $c > 0$ tal que $\|T_n\| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(ii) existe um subconjunto denso D em E tal que $(T_n x)_{n=1}^{\infty}$ converge em F para cada $x \in D$.

(a) Prove que $(T_n x)_{n=1}^{\infty}$ converge em F para cada $x \in E$.

(b) Se definimos $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ para cada $x \in E$, prove que $T \in \mathcal{L}(E; F)$.

2. Para cada $t \in [0, 1]$ seja $\delta_t : C[0, 1] \to \mathbb{K}$ definido por $\delta_t(f) = f(t)$ para cada $f \in C[0, 1]$.

(a) Prove que $\delta_t \in C[0, 1]'$.

(b) Prove que $\|\delta_s - \delta_t\| = 2$ sempre que $s \neq t$.

(c) Prove que $C[0, 1]'$ não é separável.

3. Seja E um espaço normado, seja $1 \leq p < \infty$, e seja $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência em E tal que $\sum_{j=1}^{\infty} |\phi(x_j)|^p < \infty$ para cada $\phi \in E'$. Se definimos

$$T : \phi \in E' \to (\phi(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p,$$

prove que $T \in \mathcal{L}(E', \ell_p)$.

4. Seja T: $\mathrm{L}_2[0,1] \to L_2[0,1]$ definido por

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)dt \quad \text{para cada } f \in L_2[0,1],\ x \in [0,1].$$

(a) Prove que T está bem definido e é linear e contínuo.

(b) Prove que o operador adjunto T^* está dado por

$$T^*g(x) = \int_x^1 g(t)dt \quad \text{para cada } g \in L_2[0,1],\ x \in [0,1].$$

5. Seja E um espaço normado.

(a) Prove que uma rede (x_i) converge a x na topologia fraca $\sigma(E, E')$ se e só se $(\phi(x_i))$ converge a $\phi(x)$ para cada $\phi \in E'$.

(b) Usando o teorema de Hahn-Banach (ou um de seus corolários) prove que, se M é um subespaço vetorial de E, então

$$\overline{M}^{\sigma(E,E')} = \overline{M}^{\|\cdot\|}.$$

Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp
Exame de Equações Diferenciais Parciais I
16 de Julho de 2012

1. Questão. Encontre uma solução da equação $\partial_t u + x^2 \partial_x u = 0$, para $x > 0$ e $t > 0$, com a condição inicial $u(x,0) = e^x$.

2. Questão. Seja Ω um aberto limitado em $\mathbb{R}^n$ e seja $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

(a) Se $-\Delta u = \lambda u$ em Ω e $u|_{\partial\Omega} = 0$ com $\lambda < 0$, então $u \equiv 0$.

(b) Seja $K \in \mathbb{R}$ e suponha que $u(x) \leq K$ para $x \in \partial\Omega$ e que $\Delta u \geq 0$ em Ω. Mostre que $u \leq K$ em Ω.

3. Questão. Seja $c \in \mathbb{R}$, $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$. Encontre uma fórmula explícita para uma solução do problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + cu = f(x,t), \text{ em } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) \text{ em } \mathbb{R}^n \end{cases}.$$

Sugestão: Use a mudança $v = e^{ct}u$.

4. Questão. Seja u de classe C^∞ satisfazendo a equação da onda $u_{tt} - \Delta u = 0$ em $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. ($u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$). Mostre que a função $U(r,t) = ⨍_{|x|=r} u(x,t)dS_x$ satisfaz a *equação de Euler-Poisson-Darboux* $U_{tt} - U_{rr} + \frac{1-n}{r}U_r = 0$, $r > 0$, $t > 0$.

5. Questão. Seja $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ tal que $< xF, \varphi >= 0$, para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$; isto é $xF = 0$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Mostre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $F = c\delta_0$, onde δ_0 é a delta de Dirac em 0.

EXAME DE QUALIFICAÇÃO
MM 444, Álgebra não comutativa, 11/07/2012

1. a) (0,4 pt) Definir anel semi-simples. Enunciar o teorema de Wedderburn e Artin.
b) (0,4 pt) Definir anel primitivo. Enunciar o teorema sobre a densidade.
c) (0,2 pt) Enunciar o teorema de Skolem e Noether.
d) (2 pt) **Escolher apenas um** dos teoremas dos itens (a), (b), (c), e demonstrá-lo.

2. (2 pt) Responder **falsa** ou **verdadeira** a cada uma das perguntas abaixo. Justificar as suas respostas. *Respostas **SEM** a devida justificativa não sertão consideradas.*
a) Se R é um anel artiniano à direita e sem divisores de zero, então R é anel de divisão.
b) Se A e B são duas álgebras centrais simples e de dimensão finita sobre o corpo F então o produto tensorial $A \otimes_F B$ é simples.
c) Seja V um espaço vetorial sobre o corpo F. A álgebra das transformações lineares de V é simples.
d) Se o grupo G é periódico e finitamente gerado então G é finito.

3. Sejam D um anel de divisão e $Z = Z(D)$ o centro de D tais que $\dim_Z D < \infty$. Suponha L um subcorpo maximal de D.
a) (1 pt) Mostrar que $\dim_Z L = \dim_L D$ e concluir que $\dim_Z D$ é sempre um quadrado.
b) (1 pt) Suponha Z de característica $p > 0$. Mostrar que existe pelo menos um elemento $a \in D$, $a \notin Z$ tal que a é separável sobre Z.
c) (0,5 pt) Se a é o elemento do item (b), denote $F = Z(a)$ e seja $D_1 = C_D(F)$ o centralizador de F em D. Mostrar que $F = C_D(D_1)$.
d) (0,5 pt) Usando (b) e (c) mostrar que existe um subcorpo maximal de D que é separável sobre Z.

4. a) (0,5 pt) Definir o **radical de Jacobson** $J(R)$ e o *radical de Baer* $\beta(R)$ de um anel R.
b) (0,5 pt) Mostrar que $\beta(R) \subseteq J(R)$.
c) (1 pt) Seja V um espaço vetorial sobre o corpo dos racionais, de dimensão infinita enumerável, com base e_1, e_2, $\ldots$, e seja G a álgebra exterior de V. Calcular $J(G)$ e $\beta(G)$.
(A álgebra G tem como base os elementos 1 e todos "monômios"$\{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_n}\}$, onde $n \geq 1$ e $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$, e a multiplicação é induzida por $e_ie_j = -e_je_i$ para todos i e j.

Boa prova!

Exame de Qualificação - MM427 - 11/07/2012

Todos os anéis considerados nesta prova são comutativos com $1 \neq 0$.Dado o anel R usaremos as notações $Spec(R)$ para o conjunto dos ideais primos de R e $max(R)$ para o conjunto dos ideais maximais de R.

1) Faça cada uma das questões abaixo.

a)(1,0) Seja A um anel e $\mathbf{m}$ um ideal maximal de A. Mostre que: se I é ideal de A tal que $\mathbf{m}^2 \subseteq I \subseteq \mathbf{m}$ então I é $\mathbf{m}$-primário.

b)(1,0) Seja A um anel que satisfaz a seguinte condição: todo ideal I de A que **não** está contido no nilradical de A contem um elemento indempotente **não** nulo. Mostre que: o nilradical de A é igual ao radical de Jacobson de A.

c)(1,0) Sejam A um anel, M um A-módulo finitamente gerado $1 < n \in \mathbb{N}$. Mostre que: Se $\varphi : M \to A^n$ é homomorfismo sobrejetor então $Ker(\varphi)$ é finitamente gerado.

d)(1,0) Sejam R um anel, $J = J(R)$ o radical de Jacobson de R e M um R- módulo não nulo que é simples (ie, os únicos submódulos de M são os triviais). Pergunta-se:

A afirmação $M \otimes_R \frac{R}{J} \simeq M$ é verdadeira ou falsa? (justifique sua resposta)

e)(1,0) Seja R um domínio noetheriano com $dim_{Krull}(R) = 1$. Mostre que: Se todo ideal maximal de R é principal e I é um ideal radical (ie, $\sqrt{I} = I \subset R$) então I também é ideal principal.

---

2. a)(0,5) Seja R um anel. Enuncie o princípio Local-Global para R- módulos (ou **'local property'**)

b) (1,0) Sejam R um anel semi local com $max(R) = \{\mathbf{m_1}, \cdots, \mathbf{m_k}\}$ e M um R-módulo. Mostre que: M é finitamente gerado se e somente se para todo i, $M_{\mathbf{m_i}}$ é $R_{\mathbf{m_i}}$ módulo finitamente gerado. Conclua que R é noetheriano se e somente se para todo i, $R_{\mathbf{m_i}}$ é noetheriano.

c) (1,0) Sejam $\mathbb{Z}_2$ o corpo com 2 elementos e $R = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2 = \{x = (x_j)_{j=1}^{\infty}; x_j \in \mathbb{Z}_2\}$ o anel das sequências com coordenadas em $\mathbb{Z}_2$ (as operações são definidas coordenada a coordenada). Para cada i considere a projeção $\pi_i : R \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ definida por $\pi_i(x) = x_i$, onde $x = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ e $\mathbf{m_i} = Ker(\pi_i) = \{x \in R; x_i = 0\} \in max(R)$. Mostre que:

c_1) Para todo i, $\tilde{\pi}_i : R_{\mathbf{m_i}} \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ definida por $\tilde{\pi}_i(\frac{x}{s}) = x_i$, onde $x, s \in R$ e $s \notin \mathbf{m_i}$ é uma aplicação bem definida , é um isomorfismo de anéis e portanto para todo i, $R_{\mathbf{m_i}}$ é noetheriano.

c_2) R não é anel noetheriano

---

3. Seja B/A uma extensão de anéis.

a)(0,5) dado $x \in B$ defina o conceito x é inteiro (ou integral) sobre A e tb defina quando B/A é extensão inteira (ou integral).

b)(1,0) Se B/A é extensão integral de anéis noetherianos e $\mathbf{m} \in max(A)$ então $\frac{B}{\mathbf{m}B}$ é artiniano. Mais ainda conclua que A é semilocal se e somente se B é semilocal.

c)(1,0) Seja B/A uma extensão integral com B sendo domínio. Mostre que: Se $A = K$ é corpo e $B = K[x_1, \cdots, x_n]$ então:

B é corpo se e somente se $x_1, \cdots, x_n$ são algébricos sobre K (neste caso, o mesmo que inteiros sobre K)

BOA PROVA

EQD - MM 448 - Grupos de Lie - 13/07/2012

RA/Nome: ______________________________

Escolha 5 questões das abaixo.

1. Considere os seguintes Grupos de Lie:
$GL(n,\mathbb{R})$, $GL(n,\mathbb{R})^+$, $GL(n,\mathbb{C})$, $SL(n,\mathbb{R})$, $SL(n,\mathbb{C})$, $O(n)$, $O(n,\mathbb{C})$, $SO(n)$, $SO(n,\mathbb{C})$, $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$, $Sp(n,\mathbb{R})$, $Sp(n,\mathbb{C})$.
(a) Quais são compactos? Escolha um que não é, e prove.
(b) Quais são conexos? Escolha um que não é, e prove.
(c) Quais são simplesmente conexos?

2. Seja G o grupo de Heisenberg, isto é, o grupo de Lie das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

com $x, y, z \in \mathbb{R}$.
a) Calcule $Z(G)$.
b) Descreva os subgrupos de Lie conexos de G, e mostre que todos estes subgrupos são fechados.
c) Seja H o subconjunto dessas matrizes com $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Mostre que H é subgrupo fechado e que a variedade diferenciável G/H não admite uma estrutura de grupo de Lie.
d) Descreva as órbitas das representações adjunta e co-adjunta de G.

3. Mostre que se $G \times M \to M$ é uma ação diferenciável do grupo de Lie G na variedade diferenciável M então a função $x \mapsto \dim(G \cdot x)$ é semicontínua inferiormente.

4. Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Tome elementos $A, B \in \mathfrak{g}$ que geram $\mathfrak{g}$ (isto é, os colchetes sucessivos entre A e B geram $\mathfrak{g}$). Mostre que os grupos a 1-parâmetro $\exp(tA)$ e $\exp(sB)$ geram G.

5. a) Mostre que $Z(SU(2)) = \{-1, 1\}$.
b) Descreva todos os subgrupos normais de $SU(n)$.

6. a) Seja G é um Grupo de Lie não-compacto e seja μ sua medida de Haar. Mostre que $\mu(G) = \infty$.
b) Mostre que se G é um grupo compacto, então G é unimodular.

EQM Geometria Riemanniana - 13 de julho de 2012

Nome:

Escolha cinco exercícios.

Exercício 1. *Se* (M, g) *é uma variedade riemannian mostre que para todo ponto* $p \in M$ *é possível encontrar um referencial local, em uma vizinhança* $p \in U$, $\{E_i\}$ *ortonormal para o fibrado tangente. Sobre quais condições este referencial pode ser um referencial coordenado.*

Exercício 2. *Se* Γ_{ij}^k *são os símbolos de Christoffel de uma conexão em* TM *quais são os símbolos de Christoffel da conexão induzida em* T^*M.

Exercício 3. *Mostre que o transporte paralelo da conexão Levi-Civita é uma isometria.*

Exercício 4. *Se* (M, g_M) *e* (N, g_N) *são variedades riemannianas, um mapa* $\phi : M \to N$ *é dito uma isometria local se todo ponto* $p \in M$ *possui uma vizinhança aberta* U *tal que* ϕ_U *é uma isometria de* U *em um aberto de* N. *Suponha que* M *seja conexa e que* $\phi, \psi : M \to N$ *são duas isometrias locais tais que* $\phi(p) = \psi(p)$ *para algum* $p \in M$ *e que neste ponto temos* $d\phi_p = d\psi_p$. *Mostre que* $\phi = \psi$. *(Dica: Calcule uma isometria local em um sistema de coordenadas normais.)*

Exercício 5. *Seja* S^2 *a esfera unitária em* $\mathbb{R}^3$. *Mostre que* $S^2 - (0, 0, 1)$, *com a métrica induzida de* $\mathbb{R}^3$, *não pode ser geodesicamente completa.*

Exercício 6. *Suponha que todas as curvaturas seccionais de* (M, g) *são não positivas. Mostre que para qualquer* $p \in M$, p *não possui pontos conjugados.*

EQM Topologia Algébrica - 13 de julho de 2012

Nome:

Escolha cinco exercícios.

Exercício 1. *Utilize o teorema de Van Kampen para calcular o grupo fundamental do toro. Mostre que o grupo fundamental do bi-toro não é abeliano.*

Exercício 2. *Seja um mapa* $f : S^{2n} \to S^{2n}$, *mostre que existe* $x \in S^{2n}$ *tal que* $f(x) = x$ *ou* $f(x) = -x$. *Conclua que todo mapa em* $f : \mathbb{R}P^{2n-1} \to \mathbb{R}P^{2n-1}$ *possui ponto fixo.*

Exercício 3. *Sabendo que o anel de cohomologia de* $\mathbb{R}P^n$ *é* $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^{n+1})$, *mostre que não existe mapa* $f : \mathbb{R}P^m \to \mathbb{R}P^n$ *que induz mapa não trivial em* $H^1(\mathbb{R}P^m, \mathbb{Z}_2) \to H^1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$ *se* $n > m$.

Exercício 4. *Enuncie o teorema de levantamento de mapas para espaços de recobrimento. Use este teorema para mostrar que um espaço de recobrimento simplesmente conexo é universal.*

Exercício 5. *Mostre que uma sequência exata curta de complexos (Pode ser tanto de homologia quanto de cohomologia, escolha a sua predileta) induz uma sequência exata longa.*

Exercício 6. *Calcule* $\pi_n(S^n)$.