MM719 - 1S 2011 - Exame de Qualificação (14/07/2011)

Nome: ______________________________ RA: ____________

1. Responda falso ou verdadeiro a cada uma das afirmações abaixo. Justifique suas respostas (respostas sem justificativas não serão consideradas)

a) (8pts) Se $T : \mathbb{R}^8 \longrightarrow \mathbb{R}^8$ é um operador linear com polinômio característico $f(X) = (X-1)^3(X-2)^5$ e polinômio minimal $p(X) = (X-1)^2(X-2)^2$ então a dimensão do subespaço dos vetores característicos de T é exatamente igual a 5.

b) (8pts) Sejam K um corpo e V um K-espaço vetorial de dimensão finita. Se $T : V \longrightarrow V$ é um operador linear que não é invertível então existe um operador não nulo $U : V \longrightarrow V$ tal que $T \circ U = U \circ T = 0$.

c) (8pts) Sejam K um corpo e V um K-espaço vetorial de dimensão finita. Se $T : V \longrightarrow V$ é um operador linear que é invertível então $T^{-1} = F(T)$, onde $F(X) \in K[X]$ é um polinômio.

d) (8pts) Dados um corpo K e um número natural $n > 1$. Se A é a matriz, $n \times n$, definida por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ . & . & . & ... & . \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

então A é diagonalizável.

e) Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $S = V \otimes_S V =$ o produto simétrico de V por V, $W = V \wedge V =$ o produto exterior de V por V e $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ a transformação bilinear definida por

$$B((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_1 - x_3y_1 - x_1y_2 + x_3y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 + x_3y_3.$$

e_1) **(5pts)** Existe $T : S \longrightarrow \mathbb{R}$ linear tal que para todo $u \otimes_S v \in S$, $T(u \otimes_S v) = B(u, v)$.

e_2) **(5pts)** Existe $U : W \longrightarrow \mathbb{R}$ linear tal que para todo $u \wedge v \in W$, $U(u \wedge v) = B(u, v)$.

f) (8 pts) Sejam A e B duas matrizes 4×4 com entradas em $\mathbb{R}$. Se o polinômio mínimo de ambas é igual a X^2 e elas possuem o mesmo posto, então A e B são semelhantes.

2. Sejam K um corpo e $\mathbb{M}_n = \mathbb{M}_n(K)$ o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas em K $(n > 1)$. Dado $A \in \mathbb{M}_n$ defina o operador linear $T_A : \mathbb{M}_n \longrightarrow \mathbb{M}_n$ por $T_A(B) = AB$. Mostre que:

a) (7pts) Se $A, C, D \in \mathbb{M}_n$ e $\alpha \in K$ então $T_{AC+\alpha D} = T_A \circ T_C + \alpha T_D$. Conclua que se $f(X) \in K[X]$ e $A \in \mathbb{M}_n$ então $f(T_A) = T_{f(A)}$.

b)(8pts) A e T_A tem os mesmos auto-valores.

c) (10pts) A é diagonalizável se e somente se T_A é diagonalizável.

3. Sejam V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão finita n e com um produto interno hermitiano. Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear.

a) (7 pts) Defina o operador adjunto T^* de T, diga quando T é operador normal e enuncie o teorema espectral.

b) (7pts) Mostre que se $W \subseteq V$ é subespaço T-invariante (ie $T(W) \subseteq W$) então $W^\perp$ é T^*-invariante.

c) (11pts) Suponha que T tenha a seguinte propriedade: todo subespaço de V que é T-invariante tambem é T^*-invariante. Mostre que T é normal.

BOA PROVA

Departamento de Matemática, IMECC-UNICAMP
EXAME DE QUALIFICAÇÃO DE MESTRADO
ANÁLISE NO $\mathbb{R}^n$

20 de julho de 2011.

1. (a) Seja $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ bilinear. Mostre que existe $c > 0$ tal que
$$|B(u, v)| \leq c|u||v|$$
para todo $u \in \mathbb{R}^n$ e $v \in \mathbb{R}^m$.
   (b) Mostre que B é diferenciável.

2. (a) Mostre que, para $c = 3$
$$y^2 + 2cx^2 + 4x^3 = 1 \tag{1}$$
define uma curva fechada em $\mathbb{R}^2$ de classe C^∞ que contorna a origem e encontra o eixo x nos pontos $x_1 = -1/2$ e $x_2 = (-1 + \sqrt{3})/2$.
   (b) Suponha que precisamos parametrizar essa curva fechada. Os termos quadráticos de (1) fornecem a elipse
$$y^2 + 2cx^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(\frac{1}{\sqrt{2c}})^2} + y^2 = 1$$
que pode ser parametrizada por $x = \cos t/\sqrt{2c}$, $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.
Considere o sistema de equações
$$\begin{aligned} &F = x - r\tfrac{\cos t}{\sqrt{2c}} = 0 \\ &G = y - r\sin t = 0 \\ &H = y^2 + 2cx^2 + 4x^3 - 1 = 0 \end{aligned}$$
Explique, em detalhes, quais as condições que devemos ter para que o sistema $(F, G, H) = 0$ forneça x, y, r como funções suaves de t e c.
Supondo que essas condições estão atendidas, escreva fórmulas explícitas para as derivadas $\partial x/\partial t$ e $\partial y/\partial t$?

3. Seja $\omega = adx + bdy + cdz$ uma 1-forma de classe C^1 de $\mathbb{R}^3$
   (a) Calcule $d\omega$ e defina o que significa dizer que ω é fechada.
   (b) Se ω é fechada e f é definida por
$$f(x, y, z) = \int_\gamma \omega$$
onde $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ é dada por $\gamma(t) = (tx, ty, tz)$. Mostre que
$$\frac{\partial f}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = c.$$
Basta mostrar uma dessas igualdades.

4. Seja ω uma r-forma de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ tal que $\int_M \omega = 0$ para toda variedade compacta e orientável M de dimensão r de $\mathbb{R}^n$. Use o teorema de Stokes para mostrar que ω é fechada.

5. Seja $f : B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo de classe C^1 de $B_r(x_0)$ em $f(B_r(x_0))$. Se $\|f'(x)^{-1}\| \leq M$ para todo $x \in B_r(x_0)$ e $|f(x_0)| < r/M$, mostre que f tem um zero.
   Sugestão: Mostre que existe $\delta > 0$ tal que $0 \in B_\delta(y_0)$ e $B_\delta(y_0) \subset f(B_r(x_0))$, onde $y_0 = f(x_0)$.

BOA PROVA!

EXAME TOPOLOGIA GERAL, 18/7/2011
Nome: RA:
Assinatura:

Responder com curta justificativa se cada uma das seguintes afirmações é VERDADEIRA ou FALSA. Cada ítem vale 1,0 pontos.

1. Os racionais $\mathbb{Q} \subset (\mathbb{R}, Euclid.)$ são um subespaço DISCRETO.
2. As componentes conexas por caminhos de um espaço topológico X são subespaços FECHADOS.
3. Para qualquer espaço topológico X e compacto $Y \subset X$, o fecho $\overline{Y}$ é também COMPACTO.
4. Se $X \times Y$ é o espaço produto, a PROJEÇÃO $p : X \times Y \longrightarrow X$ é sempre FECHADA.
5. Todo subgrupo não tivial, discreto de $(\mathbb{R}, +)$ é CÍCLICO INFINITO.
6. O grupo topológico $U(3)$ é HOMEOMÓRFO, como espaço topológico, com o $SU(3) \times U(1)$, mas eles NÃO são ISOMÓRFOS como grupos.
7. A aplicação ANTÌPODA de S^3 é HOMOTÒPICA à id_{S^3}.
8. Seja X HOMOTOPICAMENTE EQUIVALENTE a Y. Então, X têm a propriedade do PONTO FIXO para HOMEOMORFISMOS APENAS SE Y TEM A MESMA propriedade.
9. Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$, com $m.d.c.(m, n) = 1$, i.é., relativamente primos, e seja $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid z\overline{z} + w\overline{w} = 1\}$. Seja g um GERADOR de $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ e a ação de g

$$g \cdot (z, w) = (\exp(\frac{2\pi}{m} i)z, \exp(\frac{2\pi n}{m} i)w)$$

que define naturalmente uma ação LIVRE

$$\alpha : \mathbb{Z}_m \times S^3 \longrightarrow S^3$$

cujo quociente é o chamado espaço LENTICULAR $L(m, n)$.

10. $\pi_1 L(m, n) \cong \mathbb{Z}_n$.