# Álgebra Linear
# Exame de qualificação

**Nome** : ______________________________
**RA** : ___________

**Exercícios:**

1. Seja
$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -8 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Encontre uma matriz invertível $P$ tal que $P^{-1}AP = J$ seja uma matriz de Jordan.

2. Se $f$ e $g$ sao duas formas quadraticas em $x_1, \ldots, x_n$ sobre os reáis, e $f$ e positiva definida, então podemos reduzir simultaneamente as duas em soma de quadrados?

3. Seja $A$ uma matriz com coeficientes reais. Se pensarmos $A$ com coeficientes complexos, seja $A = SJS^{-1}$, onde $S$ é invertível e $J$ é a forma canônica de Jordan de $A$. Prove que o número e o tamanho dos blocos de Jordan de todo autovalor $\lambda$ de $A$ são iguais aos de $\overline{\lambda}$, o complexo conjugado de $\lambda$.

4. Sejam $V$ e $W$ espaços vetoriais de dimensão finita. Prove que $Hom(V, W)$ é canônicamente isomorfo a $V^* \otimes W$.

5. Seja $V$ espaço vetorial tal que $\dim(V) = 3$ e seja $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma sua base. Seja $A : V \to V$ uma transformação linear. Escreva a matriz de $\Lambda^2 A : \Lambda^2 V \to \Lambda^2 V$ com respeito à base $e_1 \Lambda e_2$, $e_1 \Lambda e_3$, $e_2 \Lambda e_3$ de $\Lambda^2 V$ dada a matriz de $A$ com respeito a $B$.

**Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp**
**Exame de Análise no $\mathbb{R}^n$**
**31 de Julho de 2015**

**Nome:** ______________________________________ **RA:** _______________

**Questão 1. (2,5)**

(a) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciável e $M > 0$ uma constante. Mostre que se $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| \leq M$, para todo $x \in U$ e $i = 1, ..., n$, então $f(\Omega)$ é limitado quando $\Omega \subset U$ é limitado e convexo.

(b) Sejam $1 < \theta < \infty$ e $f : U \to \mathbb{R}^m$, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto conexo. Assuma que

$$|f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y|^\theta \text{ para todo } x, y \in U,$$

onde $K > 0$ é uma constante. Mostre que $f$ é constante em $U$.

**Questão 2. (2,5)**

(a) Demonstre o teorema da aplicação inversa usando o teorema da aplicação implícita.

(b) Mostre que se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é de classe $C^1$, então $f$ não é injetora.

(c) Seja $f$ um difeomorfismo de classe $C^1$. Mostre que se $f$ é uma aplicação de classe $C^r$ então $f$ é um difeomorfismo de classe $C^r$.

**Questão 3. (1,5)** Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2$. Use o teorema de Fubini para mostrar que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y), \text{ para todo } x, y \in U.$$

**Questão 4. (2,0)** Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado tal que a fronteira $\partial\Omega$ é uma superfície conexa de classe $C^\infty$. Assuma que $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um campo de classe $C^1$.

(a) Usando o Teorema de Stokes (em sua forma mais geral), mostre que

$$\int_\Omega div(F)dx = \int_{\partial\Omega} (F \cdot n)dS.$$

(b) Mostre que se $div(F) \equiv 0$ então $F$ é tangente a $\partial\Omega$ em algum ponto.

(c) Seja $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$. Mostre que

$$\int_\Omega \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS,$$

onde $\Delta u = div(\nabla u) = \Sigma_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ e $\frac{\partial u}{\partial n}$ denota a derivada normal de $u$ em $\partial\Omega$.

**Questão 5. (1,5)**

(a) Seja $\omega = ydx + (z\cos(yz) + x)dy + y\cos(yz)dz$. Mostre que $\omega$ é uma forma fechada. Ela é exata?

(b) Sejam $\omega_1$ e $\omega_2$ formas diferenciais de classe $C^\infty$ em uma variedade diferenciável $M$ de classe $C^\infty$. Mostre que $\omega_1 \wedge \omega_2$ é exata, se $\omega_1$ é fechada e $\omega_2$ é exata.

# Exame de Qualificação - Topologia Geral - 29-07-2015

RA/Nome:

1. Mostre:
   (a) Todo subespaço compacto de um espaço de Hausdorff é fechado.
   (b) Um subespaço fechado de um espaço topológico compacto é compacto.

2. Seja $f : X \to Y$, com $Y$ Hausdorff. Então $f$ é contínua se, e somente se, o gráfico de $f$,
$$graf(f) = \{(x, f(x)); x \in X\},$$
é fechado em $X \times Y$.

3. Considere a relação de equivalência $\sim$ em $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ dada por $(x, y) \sim (x', y')$ se, e só se, ($x - x'$ é múltiplo inteiro de $2\pi$ e $y = y'$) ou ($y - y'$ é múltiplo inteiro de $2\pi$ e $x = x'$). Seja $T = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]/ \sim$ (com a topologia quociente). Descreva a aplicacação quociente e mostre que $T$ é homeomorfo a $S^1 \times S^1$.

4. Calcule o grupo fundamental de $S^2$ e $\mathbb{RP}^2$.

5. (a) Dada uma aplicação contínua $f : X \to Y$ e uma aplicação de recobrimento $p : Z \to Y$, enuncie uma condição necessária e suficiente para a existência de uma aplicação $g : X \to Z$ tal que $p \circ g = f$.
   (b) Prove que toda aplicação contínua $f : \mathbb{RP}^2 \to S^1$ é homotópica a uma constante.