MM439 - 1S 2013 - Exame de Qualificação

Nome: ____ RA: __________

Em todas as questões, $\mathfrak{g}$ denota uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ algebricamente fechado de característica zero. Escolha questões cujo total de pontos possíveis não exceda 10,5 (existem 12,0 disponíveis). Respostas sem justificativas serão desconsideradas. Bom trabalho!

1. Determine se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa.
   (a) (0,8) Se $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra nilpotente de $\mathfrak{g}$, então $\mathrm{ad}(x)$ é nilpotente para todo $x \in \mathfrak{h}$.
   (b) (0,8) Se $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ são subálgebras de $\mathfrak{g}$ satisfazendo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ como espaços vetoriais, então a multiplicação estabelece um isomorpfismo de espaços vetoriais $U(\mathfrak{g}_1) \otimes U(\mathfrak{g}_2) \to U(\mathfrak{g})$.
   (c) (0,8) Existe uma álgebra de Lie simples de dimensão 9.
   (d) (0,8) Se α e β pertencem a uma mesma base de um sistema de raízes satisfazem $\langle \alpha, \beta \rangle \neq 0$, então, $\gamma := \alpha + \beta$ é uma raíz tal que $\|\gamma\| = \min\{\|\alpha\|, \|\beta\|\}$.
   (e) (0,8) Se $\mathfrak{g}$ é simples, existe única forma bilinear, simétrica, invariante e não degenerada em $\mathfrak{g}$ a menos de múltiplo escalar.

2. Seja A uma álgebra associativa e comutativa com 1 e considere o espaço vetorial $\mathfrak{g} \otimes A$. Mostre que:
   (a) (0,5) A fórmula $[x \otimes a, y \otimes b] = [x, y] \otimes (ab)$ para todo $x, y, \in \mathfrak{g}, a, b \in A$, define uma estrutura de álgebra de Lie em $\mathfrak{g} \otimes A$.
   (b) (0,8) Se I é ideal de A, então $\mathfrak{g} \otimes I$ é ideal de $\mathfrak{g} \otimes A$ e $(\mathfrak{g} \otimes A)/(\mathfrak{g} \otimes I)$ é isomorfa a $\mathfrak{g} \otimes (A/I)$.
   (c) (1,0) Se $A = \mathbb{K}[t]$ é a álgebra de polinômios e I é o ideal gerado por t^2, então $(\mathfrak{g} \otimes A)/(\mathfrak{g} \otimes I)$ é isomorfa ao produto semidireto de $\mathfrak{g}$ por sua representação adjunta (sendo que a última é vista como álgebra de Lie com colchete trivial).

3. (1,0) Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes.
   (a) O radical solúvel de $\mathfrak{g}$ é igual ao centro de $\mathfrak{g}$.
   (b) A representação adjunta de $\mathfrak{g}$ é completamente redutível.

4. (1,0) Suponha que $\mathfrak{g}$ seja redutiva (isto é, satisfaz as condições equivalentes do exercício anterior). Mostre que $\mathfrak{g}$ possui uma única decomposição de Levi.

5. Seja R um sistema de raízes com base $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$. Dada $\alpha = \sum_{i=1}^4 n_i \alpha_i \in R$, defina $\mathrm{supp}(\alpha) = \{i : n_i \neq 0\}$. Suponha que
$$\{\alpha \in R^+ : \#\mathrm{supp}(\alpha) = 2\} = \{\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, 2\alpha_3 + \alpha_4\}.$$
   (a) (1,2) Determine a matriz de Cartan de R e, a partir dela, reconstrua as demais raízes positivas de R.
   (b) (0,5) Qual álgebra de Lie semissimples tem R como seu sistema de raízes?

6. Suponha que $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ e que $V = \mathbb{K}^n$ seja sua representação natural.
   (a) (1,0) Calcule o caráter de V e conclua que V é irredutível.
   (b) (1,0) Encontre o peso máximo de V^* e use a resposta para mostrar que $V \otimes V^*$ possui exatamente dois submódulos irredutíveis identificando seus pesos máximos.
   Dica: Qual a dimensão e o peso máximo da representação adjunta de $\mathfrak{g}$?

Departamento de Matemática – IMECC – Unicamp
Exame de Análise Funcional – 12 de Julho de 2013.

Nome:________________________________

RA:__________________________________

1. Questão. Seja X um espaço normado.
(a) (0.6) Dado $x \in X$, $x \neq 0$, demonstre que existe um funcional linear contínuo $f \in X^*$ com $\|f\| = 1$ e $f(x) = \|x\|$.
Dica: considere $f_0 \colon [\{x\}] \to \mathbb{F}$ com $f_0(\alpha x) = \alpha\|x\|$.
(b) (0.7) Dado $y \in X$, demonstre que

$$\|y\| = \max\{|g(y)|; \|g\| \leq 1\}.$$

(c) (0.7) Se Y é um espaço normado e $T: X \to Y$ é um operador linear, demonstre que T é limitado se, e somente se,

$$\sup\{|f(Tx)|; \|x\| \leq 1, \|f\| \leq 1\} < \infty.$$

2. Questão. (1.5) Seja X um espaço de Banach e $T: X \to l_\infty(\mathbb{N})$ um operador linear. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denote por $(Tx)_n$ o n–ésimo termo de $Tx \in l_\infty(\mathbb{N})$ e seja f_n o funcional linear dado por $f_n(x) = (Tx)_n$. Demonstre que T é limitado se, e somente se, cada f_n é limitado tomando o cuidado de enunciar o principal resultado que utilizar na demonstração.

3. Questão.
(a) (0.5) Enuncie os teoremas da Aplicação Aberta e do Gráfico Fechado.
(b) (1.5) Dê um exemplo onde podemos aplicar algum desses teoremas ou dê um contra–exemplo que demonstre a necessidade das hipóteses em algum desses teoremas.

4. Questão. Considere as afirmações abaixo.
(a) (0.5) Se H for um espaço de Hilbert e $(x_n) \subset H$ for uma sequência tal que $x_n \rightharpoonup x$ (convergência fraca) e $\|x_n\| \to \|x\|$, então $x_n \to x$.
(b) (0.5) Se X é um espaço normado separável então X^* é separável.
(c) (1.0) Se X é um espaço normado e $M \subset X$ é um subespaço fechado, então a restrição de $\sigma(X, X^*)$ à M e $\sigma(M, M^*)$ coincidem. Em particular, se X for reflexivo, então M também será.

Dê uma demonstração para aquelas que forem verdadeiras e um contra–exemplo para as que forem falsas.

5. Questão. Seja $A_r \colon l_2(\mathbb{N}) \to l_2(\mathbb{N})$ dado por

$$A_r(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots).$$

(a) (1.0) Demonstre que se $\lambda \in \mathbb{C}$, $0 < |\lambda| \leq 1$, então $(A_r - \lambda I)$ não é sobrejetor e conclua que

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; 0 < |\lambda| \leq 1\} \subset \sigma(A_r).$$

Dica: lembre–se que cada vetor $x \in l_2(\mathbb{N})$ se escreve como

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k.$$

(b) (1.0) Demonstre que $\|A_r\| = 1$ e conclua que

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq 1\} = \sigma(A_r).$$

(c) (0.5) A_r é auto adjunto? A_r é compacto?

Boa Prova!

Exame Qualificação - Álgebra Comutativa - 15/07/2013

Todos os anéis considerados nesta prova são comutativos e com identidade não nula.

1. Responda cada uma das questões abaixo justificando suas respostas com detalhes.

a) (5pts) Seja $A \subseteq B$ uma extensão de anéis na qual cada elemento $b \in B$ é algébrico sobre A i.e. existe $f \in A[X] \smallsetminus \{0\}$ tal que $f(b) = 0$. A afirmação de que $dim_{Krull}(A) \leq dim_{Krull}(B)$ é falsa ou verdadeira?

b)(5pts) Sejam D um domínio noetheriano com dimensão de Krull igual a 1. A afirmação de que todo ideal não trivial de D tem uma única decomposição primária minimal é falsa ou verdadeira?

c)(10pts) Sejam R um anel e $I \subset R$ um ideal próprio. A afirmação $I^2 = I$ se e somente se $I \otimes_R \frac{R}{I} = (0)$ é falsa ou verdadeira?

d) (10pts) Sejam $D = K[X]$ o anel de polinômios em uma variável sobre o corpo K, $2 \leq n \in \mathbb{N}$ e $M \subseteq D^n$ um D-submódulo. Mostre que: $L = \frac{D^n}{M}$ é D-módulo Artiniano se e somente se $T(L) = M$
($T(---)$ denota o submódulo de torsão de $(---)$)

e)(10pts) Sejam $D = \mathbb{Q}[X]$ ($\mathbb{Q}$ =corpo dos números racionais), $I = (F(X))$ onde $F(X) = (X^3 - 2).(X^4 - 4)$ e $\overline{D} = \frac{D}{I}$. Quantos ideais maximais tem $\overline{D}$? $\mathcal{N}(\overline{D}) = (0)$? ($\mathcal{N}(\overline{D})$ é o nilradical de $\overline{D}$)

---

2. Seja R um anel. **a)8pts** Dado um ideal primo $\wp$ de R. Defina a altura de $\wp$ e enuncie o teorema generalizado de Krull para ideais.

b)10pts Neste item suponha que $R = K[X_1, \cdots, X_n]$ ($n \geq 2$) é o anel de polinômios a n variáveis sobre o corpo K. Seja $I \subset R$ um ideal próprio de R. Mostre que: Se $\frac{D}{I}$ é anel artiniano e $I = (F_1, \cdots, F_n)$ com $F_i \in R$ então $n = \mu(I)$. (Lembre que $\mu(I)$ denota o número mínimo de geradores de I).

c)7pts Sabendo que $(R, \mathbf{m})$ é anel local noetheriano de dimensão 2 e que $\{\wp_1, \cdots, \wp_k\}$ é o conjunto dos primos minimais de R. Mostre que: Para todo $x \in \mathbf{m} \setminus \cup_i \wp_i$ existe $y \in \mathbf{m}$ tal que $\sqrt{(x, y)} = \mathbf{m}$.

---

3. Sejam R um anel e M um R-módulo finitamente gerado e não nulo.

a) (5 pts) Seja $a \subset R$ um ideal de R. Mostre que:

$a \neq R$ se e somente se existe $\mathbf{m} \in max(R)$=conjunto dos ideais maximais de R tal que $a \subseteq \mathbf{m}$.

b) (10 pts) Chame de $J = ann(M) = \{r \in R, rM = \{0\}\}$. Mostre que: Se $\wp \in Spec(R)$ então $M_\wp \neq \{0\}$ se e somente se $J \subseteq \wp$.

c) (10 pts) Mostre que: Se $J = ann(M)$, $I \subset R$ é ideal diferente de R e $M = IM$ então $R = I + J$.

d) (10 pts) Seja I um ideal não trivial de R. Mostre que: Se I é finitamente gerado e $I^2 = I$ então existe $e \in I$ tal que $I = eR$ e $e^2 = e$ (e é chamado de indempotente).

Boa Prova