**Exame de Qualificação do Doutorado**
**Análise Funcional - 21/07/2010**
**DM - IMECC - UNICAMP**

**Questão 1.** Seja $E$ um espaço normado e seja $M$ um subespaço vetorial fechado de $E$. Demonstre que $M$ é fechado em $E$ para a topologia fraca.

**Questão 2.** Seja $E$ um espaço de Banach e seja $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}$, $\varphi_j \in E'$ para $j \geq 1$, tal que para qualquer $x \in E$,

$$\sup_j |\varphi_j(x)| < \infty.$$

Seja $T : E \to l_\infty$ definido por

$$T(x) = (\varphi_j(x))_{j=1}^{\infty}, \ \ \forall x \in E.$$

Demonstre que $T$ é linear e contínuo.

**Questão 3.** Seja $S : l_2 \to l_2$ definido por

$$S(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \ldots) = (\xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \ldots).$$

**(a)** Demonstre que $S \in L(l_2, l_2)$.
**(b)** Demonstre que cada $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| < 1$ é um autovalor de $S$ de multiplicidade 2.
**(c)** Demonstre que $\lambda \in \sigma(T)$ (espectro do operador $T$) se e só se $|\lambda| \leq 1$.

**Questão 4.** Sejam $E$ um espaço de Hilbert, $M$ um subespaço vetorial fechado de $E$ e $x \in E \backslash M$. Demonstre que **existe um único** $y \in M$ tal que

$$\|x - y\| = d(x, M) = \inf_{z \in M} \|x - z\|.$$

**Sugestão:** Use a Lei do Paralelogramo.

**Questão 5.** Seja $F$ um espaço de Banach e seja $T \in L(F, l_1)$ um operador sobrejetivo.
**(a)** Demonstre que existe uma sequência limitada $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $F$ tal que $Ty_n = e_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, onde $e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots)$ (o $n$-ésimo termo igual a 1 e os demais termos iguais a zero).
**(b)** Demonstre que existe um operador $S \in L(l_1, F)$ tal que $Se_n = y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
**(c)** Demonstre que $T(Sx) = x$, $\forall x \in l_1$.
**Sugestão:** Em $(a)$ use o Teorema da Aplicação Aberta.

**Exame de Qualificação ao Doutorado 14/07/2010**
**Geometria Riemanniana**

$M^n \approx (M, F, \langle , \rangle , \nabla)$, conexa e munida da conexão de Levi-Civita ou Riemanniana $\nabla$ e $\gamma : [0,1] \to M$ uma geodésica.

$M$ é dita simétrica se para cada $p \in M$, existe uma isometria $I_p : M \to M$ tal que se $\gamma(0) = p$ então $I_p(\gamma(t)) = \gamma(-t)$.

**.1$^a$ Questão:**

Seja $M$ simétrica. Mostre que:

a) $M$ é completa, $I_p \circ I_q$ preserva campos paralelos ao longo de $\gamma$ e $I_p$ é única.

b) Se $U, V$ e $W$ são campos paralelos ao longo de $\gamma$ então $R(U,V)W$ é também paralelo ao longo de $\gamma$.

**2$^a$ Questão:**

Seja $\gamma : [0, \infty) \to M$ uma geodésica normal. Ela será chamada de **raio** se $d(\gamma(0), \gamma(t)) = t$.Prove que se $M$ não for compacta então para cada $p \in M$ existe um raio começando em $p$. Quais são os raios de $S^1 \times R$ ?

**3$^a$ Questão:**

$\gamma_\tau = \gamma \big|_{[0,\tau]} \; [0, \tau] \to M$. Considere $i(\tau)$ como sendo o índice de $\acute{E}(\gamma_\tau)$. Prove que:

a) $i(\tau)$ é uma função monótona não-decrescente em $\tau$.

b) $i(1)$ =índice de $\gamma$ é $< \infty$.

c) Se $K_M = 0$ então o recobrimento universal $\widetilde{M}$ de $M$ é isométrico à $R^n$. Justifique através de um exemplo que $M$ pode não ser nem homeomorfa a $R^n$.

**4$^a$ Questão:**

Considere a variedade diferenciável $Q = G_6(R^9) x S^2 \times T^2$,. Podemos torná-la uma variedade Riemanniana completa? Como? Caso possamos colocar uma métrica Riemannianas completa em $Q$ será que podemos ter $K_Q \geq 1$?

**5$^a$ Questão:**

Considere $\acute{E}(\gamma) : \Omega_\gamma \times \Omega_\gamma \to R$. Prove que:

a) Se $\gamma : [0,1] \to M$ uma geodésica minimal ligando $p = \gamma(0)$ à $q = \gamma(1)$ então o índice de $\acute{E}(\gamma)$ é 0.

b) A nulidade de $\acute{E}(\gamma)$ é $\leq n - 1$.

c) Encontre $M$ e $\gamma$ onde $\acute{E}(\gamma) = n - 1$. Justifique a sua resposta.

# Exame de Qualificação: Grupos de Lie

14/julho/2010

**Escolha 5 dentre as 7 questões abaixo.**

1. Seja $G$ um grupo de Lie. Mostre que existe uma vizinhança $V$ do elemento neutro 1 que não contém nenhum subgrupo de $G$. Vale para grupos topológicos? Dado $G$ conexo, mostre que se $V$ for uma vizinhança de 1 então $G$ é gerado por $V$, i.e. $G = \bigcup_{n \geq 1} V^{(n)}$. Conclua que se um subgrupo $H \subset G$ de um grupo conexo tem interior não vazio então $H = G$.

2. A forma de Cartan-Killing de uma álgebra de Lie $\underline{g}$ é dada por $< X, Y >= tr(ad(X) \circ ad(Y))$ para elementos $X, Y \in \underline{g}$. Mostre que um automorfismo $\phi$ em $\underline{g}$ sempre preserva essa 2-forma. Mostre que toda derivação $D$ em $\underline{g}$ é anti-simétrica em relação à forma de Cartan-Killing.

3. Seja $H \subset G$ um subgrupo de Lie conexo. Mostre que $H$ é normal em seu fecho fe$H$. Dê um exemplo.

4. Seja $G$ um grupo de Lie conexo e $H$ um subgrupo fechado. Seja também $K$ um subgrupo compacto e suponha que $\dim K - \dim(K \cap H) = \dim G/H$. Mostre que $K$ age transitivamente em $G/H$.

5. Seja $\underline{g}$ uma álgebra de Lie e denote por $\widetilde{G}$ o grupo de Lie conexo e simplesmente conexo cuja álgebra de Lie é $\underline{g}$. Mostre que o grupo dos automorfismos de $\widetilde{G}$ é isomorfo a $\mathrm{Aut}(\underline{g})$.

6. a) Seja $g(t)$, $t \in \mathbf{R}$, uma curva diferenciável em um grupo de Lie $G$. Verifique que existe uma única curva $A(t)$ na álgebra de Lie de $G$ tal que $g'(t) = R_{g(t)*}A(t)$.

   b) Use o item acima para mostrar que $e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)}$ se e somente se o colchete $[A, B] = 0$.

   c) Use os itens acima para mostrar que se $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ então
$$e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B) + \frac{t^2}{2}[B,A]}.$$

7. Seja $G$ um grupo de Lie compacto e $\underline{g}$ sua álgebra de Lie correspondente. Mostre que os autovalores de $ad(X)$, $X \in \underline{g}$ são imaginários puros. Conclua que a forma de Cartan-Killing $< X, Y >= tr(ad(X) \circ ad(Y))$ de $\underline{g}$ é negativa semidefinida.

# Álgebra Comutativa (MM427)-1S 2010-Exame de Qualificação-Doutorado

Nome: ________________________________________ RA: __________ 16/07/2010

Em todas as questões a palavra "anel" significa anel comutativo com identidade não nula. Todo módulo é um módulo (unitário) sobre um anel. Sistemas multiplicativos não contém o zero. Escolha questões de modo que o total de pontos possíveis seja 100. Respostas sem justificativas não serão consideradas. Bom trabalho!

1. Determine se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa.
   (a) (06pts) Se um ideal $I$ de um anel $R$ possui um idempotente não nulo $e$ ($e^2 = e$), então existe um ideal maximal de $R$ que não contem $I$.
   (b) (06pts) Todo módulo livre é livre de torção.
   (c) (06pts) Se $f : A \to B$ é homomorfismo de anéis, $S$ é sistema multiplicativo (subsemigrupo) de $A$ e $T = f(S)$, então $(S^{-1}A) \otimes_A B$ é isomorfo a $T^{-1}B$.
   (d) (06pts) Sejam $R$ um anel e $I, J$ dois ideais próprios de $R$ tal que $I + J = R$. Se $\frac{R}{I}$ e $\frac{R}{J}$ são Noetherianos então $R$ também é.
   (e) (06pts) O conjunto dos divisores de zero de um anel é igual à união de seus ideais primos minimais.
   (f) (06pts) Se $A \subseteq B$ é uma extensão de anéis e $Q, Q'$ são ideais primos de $B$ satisfazendo $Q \subseteq Q'$ e $Q \cap A = Q' \cap A$, então $Q = Q'$.

2. Dado um anel $R$, suponha que $M$ e $N$ sejam dois $R$-módulos finitamente gerados tais que $M \otimes_R N = 0$.
   (a) (06pts) Prove que se $R$ é um corpo, então $M = 0$ ou $N = 0$.
   (b) (04pts) Para $R$ um anel qualquer a afirmação do item (a) continua valendo?
   (c) (06pts) Mostre que o item (a) também vale caso $R$ seja um anel local.

3. Sejam $M$ um módulo simples ($M$ tem exatamente dois submódulos) do anel $R$, $I$ um ideal de $R$ e denote por $\mathrm{rad}(R)$ o radical de Jacobson de $R$.
   (a) (06pts) Demonstre que $\{ r \in R : rM = 0 \}$ é um ideal maximal de $R$.
   (b) (09pts) Mostre que: $I \subset \mathrm{rad}(R)$ se e somente se $IN = 0$ para todo $R$-módulo simples $N$.

4. (10pts) Calcule a dimensão de Krull do anel $k[x, y, z, w]/I$ onde $k$ é um corpo e $I = (x - y, z^2 - w)$.

5. Seja $R$ um anel local com ideal maximal $m$. Seja também $A$ um anel que é um $R$-módulo finitamente gerado e denote por $\mathrm{rad}(A)$ o radical de Jacobson de $A$. Demonstre que:
   (a) (06pts) O anel quociente $A/mA$ é artiniano;
   (b) (06pts) $mA \subseteq \mathrm{rad}(A)$;
   (c) (06pts) Existe $n \geq 1$ tal que $\mathrm{rad}(A)^n \subset mA$.

6. (10pts) Seja um anel $A \subseteq B$ uma extensão de anéis tal que $B$ é um domínio de integridade e é finitamente gerado como $A$-módulo. Suponha que para todo ideal próprio $I$ de $B$ vale $I \cap A = \{0\}$. Mostre que $B$ é um corpo.

7. (a) (06pts) Enuncie o teorema de Krull para ideal principal de um anel.
   (b) (09pts) Mostre que: se $R$ é um anel noetheriano, $I \subset R$ é um ideal que admite duas decomposições primárias minimais distintas e $\overline{R} = \frac{R}{I}$ então existe $a \in R$ tal que $\overline{a} = a + I$ é divisor de zero de $\overline{R}$ e todo ideal primo minimal de $\overline{a}\overline{R}$ tem altura 1.

Exame de Qualificação ao Doutorado
Primeiro semestre de 2010
Introdução à Topologia Algébrica
14/07/2010

Nome: R.A.:
Assinatura:

Responder todas as questões. As respostas das Verdadeiro ou Falso devem ser justificadas.

O valor de cada questão está assinalado em parénteses.

1. (a) (1,0) Enuncie o Teorema de van Kampen.
(b) (1,0) Seja $X \subset \mathbb{R}^3$ a união de 4 retas distintas, todas passando pela orígem. Calcule $\pi_1(\mathbb{R}^3 \diagdown X)$.

2. (2,0) (**V ou F**) Se $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^2$,onde $\mathbb{Q}$ é o conjunto dos números racionais, então o grupo $\pi_1(\mathbb{R}^2 \diagdown \mathbb{Q}^2)$ não é enumerável.

3. (2,0) Seja $H(p), resp., N(q)$,superfície orientável de gênero $p, resp., q$. Calcule os grupos de homologia com coefficientes inteiros de $H(p), resp., N(q)$ com $p \geq 0, q \geq 1$. Faça o mesmo para a soma conexa $H(p)\#N(q), q \geq 1$.

4. (2,0) (**V ouF**) Existe um $CW$ complexo 4 - dimensional, $X$ , com $\pi_1(X) = \mathbb{Z}_3$, cujo recobrimento universal é a esfera $S^4$.

5. (2,0) Considere os dois fibrados principais com grupo-fibra $SO(2) = S^1$ :
(a) A fibração de Hopf, $S^1 \cdots S^3 \longrightarrow S^2$
(b) $SO(2) \cdots SO(3) \longrightarrow S^2$ (projeção na primeira coluna) e a porção da sequência exata de homotopia de cada um deles $\cdots \pi_2(S^2) \overset{\partial}{\longrightarrow} \pi_1(S^1) \longrightarrow \cdots$ onde ambos os grupos são isomorfos a $\mathbb{Z}$. Qual é a imagem $\partial(1)$ no caso (a), resp., (b)?

6. (2,0) (**V ou F**) Dada qualquer aplicação contínua $f : S^3 \diagup \mathbb{Z}_3 \longrightarrow S^5 \diagup \mathbb{Z}_5$, então $f$ é homotópica à uma constante.

7. (**V ou F**) (1,0) (i) $\mathbb{C}P^2$ é homeomorfo a $S^2 \times S^2$ ou a $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ ou a $HP^1$.
(1,0) (ii) $S^4$ é homeomorfo a $HP^1$, $S^3 \times S^1$ ou a $S^2 \times \mathbb{C}P^1$.
(1,0) (iii) $\mathbb{R}P^3$ é homeomorfo a $SO(3)$, $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^1$ ou a $S^1 \times S^1 \times S^1$.