DM–IMECC–UNICAMP
Exame de Qualificação de Mestrado – Análise no $\mathbb{R}^n$ 07/07/2014
Aluno/RA: ______________________ /____________

Cada questão vale 2,0 pontos.

1. Sejam I um intervalo da reta e $f : I \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação (um caminho) diferenciável, com $f'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Defina $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ pondo

$$\varphi(t) = \frac{f(t)}{|f(t)|}.$$

a) **(0,8 pontos)** Calcule $\varphi'(t)$.

b) **(0,7)** Considere o caso $f(t) = u + tv$, com $u, v \in \mathbb{R}^n$ linearmente independentes, $|u| = 1$, e determine $\varphi'(0)$.

c) **(0,5)** Conclua que se v é perpendicular ao vetor unitário u então v pertence ao espaço tangente $T_u S^{n-1}$.

2. a) **(0,5)** Enuncie o Teorema da Aplicação Inversa.

b) **(0,5)** Enuncie a Forma Local das Submersões.

c) **(1,0)** Demonstre a Forma Local das Submersões usando o Teorema da Aplicação Inversa.

3. a) **(0,5)** Defina variedade com bordo (em $\mathbb{R}^n$) orientada.

b) **(1,5)** Mostre que a imagem inversa de um valor regular de uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ de classe C^1 é uma m-variedade (de classe C^1 em $\mathbb{R}^n$) e que é orientável. (Mais precisamente, $M = f^{-1}(c) \neq \emptyset$, onde $c \in \mathbb{R}^{n-m}$ é tal que f é uma submersão em todo ponto de M ($f'(x)$ é sobrejetiva para todo x em M), é uma m-variedade orientável.)

4. Sejam M uma $(n-1)$-variedade compacta e orientada (em $\mathbb{R}^n$) e N o campo vetorial unitário normal a M (correspondente à orientação). Sejam $F = (f_1, \cdots, f_n)$ um campo vetorial definido em um aberto (do $\mathbb{R}^n$) contendo M e ω a $(n-1)$-forma associada a F, i.e. $\omega = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} f_j dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n$.
Mostre que $\int_M \omega = \int_M \langle F, N \rangle$.
Obs.: se f é uma função escalar então $\int_M f = \int_M f dV$, onde dV é a forma de volume em M (se $\alpha : A \to M$ é uma parametrização, $\int_{\alpha(A)} f dV = \int_{\text{int}A} (f \circ \alpha) V(D\alpha)$, onde V é a função de volume $(n-1)$ dimensional em $\mathbb{R}^n$).

5. Sejam G o campo $\frac{x}{|x|^n}$ em $\mathbb{R}^n - \{0\}$ e η a $(n-1)$-forma associada, i.e. $\eta = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{x_j}{|x|^n} dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n$ (a *forma elemento de ângulo sólido* em $\mathbb{R}^n$).

a) Use o resultado da questão 4 para mostrar que se S^{n-1} é orientada com vetor normal $N_x = x$ (o vetor normal no ponto $x \in S^{n-1}$ é x) então $\int_{S^{n-1}} \eta = \text{vol}(S^{n-1})$.

b) Use o resultado do item **a)** para mostrar que η não é uma forma exata (em $\mathbb{R}^n - \{0\}$), i.e. não existe uma forma diferencial ω tal que $\eta = d\omega$.

c) Mostre que η é uma forma fechada, i.e. $d\eta = 0$.

Exame Qualificação - Álgebra Linear - 10/07/2014

Nesta prova $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ denotarão respectivamente os números racionais, reais e complexos. Também denotaremos por $\mathbb{M}_n(K)$ o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas no corpo K.Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Responda cada uma das questões abaixo justificando suas respostas com detalhes.

a)(5pts) Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão finita e $v_1, v_2, u \in V \setminus \{0\}$. A afirmação

$$v_1 \otimes u = u \otimes v_2, \text{ em } V \otimes V \Longrightarrow v_1 = v_2$$

é falsa ou verdadeira?

b)(5pts) Sejam V um K-espaço vetorial e $W \subset V$ um subespaço **não nulo**. A afirmação $\frac{V}{W} \otimes W \simeq V$ é falsa ou verdadeira?

c)(7pts) Seja V um $\mathbb{R}$- espaço vetorial com produto interno $< -, - >$, Mostre que: se $V_S = V \otimes_S V$ é o produto tensorial simétrico de V por V então existe $\varphi \in V_S^*$ que satisfaz: para quaisquer $u, v \in V$, $\varphi(u \otimes_S v) =< u, v >$

d)(6pts) Dadas duas matrizes $A, B \in \mathbb{M}_6(\mathbb{R})$, sabe-se que ambas têm como polinômio caraterístico $f(X) = (X-2)^3(X-1)^3$ e como polinômio mínimo $p(X) = (X-2)^2(X-1)^2$. Pergunta -se: elas são semelhantes?

e)(10pts) Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ um operador linear. Sabendo que T é simétrico, tem polinômio característico $f(X) = (X-1)^3(X-2)$ e que $u = (1, 1, 1, 1)$ é vetor característico associado ao auto-valor 2, encontre uma base ortonormal de auto-vetores de T e encontre a matriz de T na base canônica.

f)(7pts) Seja o espaço vetorial $V = \mathbb{C}^2$ com o produto Hermitiano canônico. Dado o operador linear $T : V \to V$ cuja matriz em relação a base $\alpha = \{v_1 = (1, i),\ v_2 = (1, 2i)\}$ é $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Pergunta-se: T é operador normal?

g)(5pts) Seja $V = \mathbb{C}^n$ com produto Hermitiano canônico $< -, - >$ .Mostre que o único operador autoadjunto $T : V \to V$ que satisfaz $< T(v), v >= 0$ para todo $v \in V$ é o operador nulo.

---

2. Dados K um corpo, V um K-espaço vetorial e $T : V \to V$ um operador linear, vamos usar a seguinte notação: $\mathcal{Z}_T = \{f(X) \in K[X]; f(T) = 0\}$

a)7pts Mostre que: se V é um K-espaço vetorial com base enumerável $\alpha = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$ e $T : V \to V$ é o operador linear definido por $T(e_i) = e_{i+1},\ i = 1, 2, \cdots$ então $\mathcal{Z}_T = \{0\}$.

b)8pts Mostre que: Se V é um K-espaço vetorial e $S : V \to V$ é um operador linear de posto finito (ie, $dim(S(V)) < \infty$) então $\mathcal{Z}_S \neq \{0\}$.

c)5pts Mostre que: Um K-espaço vetorial V tem dimensão finita se e somente se $\mathcal{Z}_T \neq \{0\}$ para todo operador linear $T : V \to V$.

3(15pts) Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definido por $T(x, y, z, w) = (x + 2z + 2w, 2y + z, -y, y - z - w)$. Encontre a forma de Jordan de T e uma base de Jordan.

---

4. a)(10pts) Sejam K um corpo , V um K-espaço vetorial de dimensão finita n e $f, g \in V^*$. Mostre que: $H : V \times V \to K$ definida por $H(u, v) = f(u)g(v)$ é bilinear. Mais ainda mostre que H é simétrica não nula se e somente se f é não nula e existe $a \in K \setminus \{0\}$ tal que $g = af$ (Sugestão: Dada uma base $\alpha = \{e_1, \cdots, e_n\}$ trabalhe com as igualdades $H(e_i, e_j) = H(e_j, e_i)\ \ i, j = 1, \cdots, n$)

b)(10pts) Dada a forma quadrática $q : V = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por: $q(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 + zx$. Encontre uma matriz ortogonal U de forma que a troca de variáveis

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

resulte em $ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2$, para convenientes $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$.

Boa Prova

Exame Qualificação Julho 2014 - **Topologia Geral**.

ATENÇÃO: Não é permitido destacar as folhas

NOME:____ **RA:**_______________.

Escolha 5 questoēs. Incluir na prova todas as contas feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Bom Trabalho!

(1) a) Sejam G um grupo topológico simplesmente conexo e H um subgrupo normal e discreto. Prove que $\pi_1(G/H, e) = H$.
b) Calcular o grupo fundamental de uma garrafa de Klein.

(2) a) Sejam $p : \tilde{X} \to X$ um espaço de recobrimento e α e $\beta : [0,1] \to X$ caminhos tais que $\alpha \simeq \beta \ rel\{0,1\}$. Provar que se $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ são levantamentos de α e β respectivamente tais que $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$ então $\tilde{\alpha} \simeq \tilde{\beta} \ rel\{0,1\}$.
b) Sejam $p : \tilde{X} \to X$ um espaço de recobrimento e $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Provar que $p_\sharp : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ é injetora.

(3) Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma aplicação contínua sobrejetiva e fechada tal que para cada $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ é compacto. Provar que se Y é compacto então X é compacto.

(4) Sejam X e Y espaçõs topológicos, Hausdorff e localmente compactos e $f : X \to Y$ contínua. Então f é propria se e somente se f estende-se a uma função contínua $f^* : X^* \to Y^*$ tal que $f^*(\infty_X) = \infty_Y$. Onde X^* e Y^* são as compactificações de Alexandroff de X e Y respectivamente.

(5) Sejam $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios. Então $X = \Pi_{i \in I} X_i$ é conexo se e somente se cada X_i é conexo.

(6) Seja $\mathbb{R}$ com a topologia τ definida pela base $\mathcal{B} = \{[a, b) : a < b\}$. Provar que:
a) $(\mathbb{R}, \tau)$ verifica o primeiro axioma de enumerabilidade porém não verifica o segundo axioma de enumerabilidade.
b) $(\mathbb{R}, \tau)$ é Lindelöff.
c) Todo compacto de $(\mathbb{R}, \tau)$ é enumerável e nunca denso na topologia euclideana.