Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp

Exame de Análise no $\mathbb{R}^n$ - 21 de Julho de 2010.

1. Questão. Sejam f e g duas funções diferenciáveis em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^n$, e suponha que $f(0) = g(0)$ e que $(\nabla_x f)(0) = (\nabla_x g)(0)$. Seja h uma função definida em uma vizinhança Ω de 0, tal que, $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ em Ω. Mostre que h é diferenciável em $x = 0$.

2. Questão.

(a) Assuma que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é tal que $f(0) = 0$ e $\nabla_x f(0) = 0$, e seja $K > 0$ uma constante. Mostre que se

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right| \leq K, \quad \text{para todo } |x| \leq 1 \text{ e } i, j \in \{1, 2, ..., n\},$$

então existe $C > 0$ e uma vizinhança da origem Ω, tal que,

$$|f(x)| \leq C\,|x|^2 \text{ para todo } x \in \Omega.$$

(b) Mostre que a recíproca do resultado contido no item **(a)** é falsa.

3. Questão.

(a) Demonstre o teorema da aplicação inversa, usando o teorema do posto.

(b) Considere o seguinte sistema definido no aberto $U = (-1, 1) \times (-1, 1) \subset \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{40} x_1^4 + \frac{1}{5} \ln(x_2 + e^2) = a_1 \\ x_2 + \frac{1}{7} \sin(x_1) + 1 = a_2 \end{cases} \tag{1}$$

Mostre que o sistema (1) tem uma única solução $x = (x_1, x_2) \in U$ quando $a_1 = \frac{2}{5}$ e $a_2 = 1$.

4. Questão.

(a) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto conexo e limitado tal que $S = \partial\Omega$ é uma superfície de classe C^∞. Assuma que $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $F \in C^1$. Usando o Teorema de Stokes (em sua forma mais geral), mostre que

$$\int_\Omega div(F) dx = \int_{\partial\Omega} (F \cdot n) dS \quad \text{(Teorema da Divergência)}.$$

(b) Mostre que se $div(F) \equiv 0$ então F é tangente a $\partial\Omega$ em algum ponto.

5. Questão. Seja Ω um aberto em $\mathbb{R}^3$ e $M : \Omega \to \mathcal{M}_{3\times 3}$ uma função diferenciável com valor no espaço das matrizes reais 3×3, dada por

$$M(x) = \begin{pmatrix} m_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & m_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & m_3(x) \end{pmatrix},$$

onde m_i são funções diferenciáveis. Para cada $x \in \Omega$ fixado, defina a forma bilinear $B(x)(v, w) = (M(x)v) \times (M(x)w)$ para todo par de vetores $v, w \in \mathbb{R}^3$. Seja $\pi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a projeção na primeira coordenada, isto é, $\pi_1[(a, b, c)] = a$. Mostre que $L(x) = \pi_1 \circ B(x)$ é uma 2-forma e calcule dL.

Álgebra Linear(MM719)-1S 2010-Exame de Qualificação-Mestrado

Nome: ____ RA: __________ 14/12/2009

Escolher questões cujo total de pontos possíveis seja 100. Respostas sem justificativas serão desconsideradas. Bom trabalho!

1. Responda se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa.

   (a) (08pts) A matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é diagonalizável quando considerada no espaço $M_4(\mathbb{C})$.

   (b) (08pts) Para toda transformação linear em $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ temos que $\operatorname{Nu} T \oplus \operatorname{Im} T = \mathbb{C}^n$.

   (c) (08pts) Se $V = \mathbb{R}^3$ com o produto interno usual, então existe um operador linear auto-adjunto $T : V \to V$ satisfazendo $T(0,1,1) = (0,1,1)$ e $T(1,2,3) = (2,3,5)$.

   (d) (08pts) Para uma matriz nilpotente $A \in M_n(\mathbb{R})$ temos que $\operatorname{tr}(M^t) = 0$, para todo $t \geq 1$.

   (e) (08pts) Se uma transformação linear $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ só tem autovalores reais, então T é auto-adjunta.

   (f) (08pts) Se para uma transformação linear em $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ valer $T \circ T^* = 0$, onde T^* é a adjunta de T, então $T = 0$.

   (g) (08pts) Se V é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial e $u \in V$ é um vetor não nulo, então a aplicação linear $T_u : V \to V \otimes V$ definida por $T_u(v) = u \otimes v$ é injetora.

2. (15pts) Seja $T : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ uma transformação linear cuja matriz na base canônica é $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Encontre uma base de Jordan para T e a forma canônica de Jordan de T.

3. (15pts) Seja $f(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$ uma forma quadrática definida sobre $\mathbb{R}^3$. Encontre uma matriz ortogonal U de forma que a troca de varáveis $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ sstisfaça $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2$, para convenientes a, b, $c \in \mathbb{R}$.

4. (12pts) Seja $\{T_i : i \in \mathcal{I}\}$ um subconjunto de $\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ onde V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado $\mathbb{F}$. Suponha que $T_i T_j = T_j T_i$ para todo $i, j \in \mathcal{I}$. Mostre que existem subespaços $V_1, \ldots, V_m$ para algum $m \geq 1$ tais que $V = \bigoplus_{j=1}^{m} V_j$ e, se $v \in V_j$ para algum j, então v é autovetor generalizado de T_i para todo $i \in \mathcal{I}$.

5. (10pts) Dê um exemplo de espaço vetorial que não é isomorfo ao seu dual.

6. (12pts) Enuncie a propriedade universal do produto tensorial entre dois espaços vetoriais e demonstre a existência e a unicidade de tal produto.

UNICAMP – IMECC
Pós-Graduação em Matemática – 1º semestre de 2010
EXAME DE QUALIFICAÇÃO EM TOPOLOGIA

Nome: ....

Questão 1. *Denotamos por $\mathcal{D}$ o conjunto das funções contínuas por partes $\rho : [0,1] \to [0,+\infty)$ tais que*

$$\int_0^1 \rho(x)dx = 1.$$

Munimos então $\mathcal{D}$ com uma topologia cuja base é formada pelos conjuntos abertos

$$\mathcal{V}_{\rho_0}(\epsilon; f_1, \ldots, f_\ell) := \left\{ \rho \in \mathcal{D} : \left| \int_0^1 f_k(x)[\rho(x) - \rho_0(x)]dx \right| < \epsilon,\, k = 1, \ldots, \ell \right\},$$

onde $\rho_0 \in \mathcal{D}$, $\epsilon > 0$, $\ell \in \mathbb{N}$ e $f_1, \ldots, f_\ell \in C^0([0,1])$. Mostre que, nesta topologia, a seqüência $\{\rho_n(x) = \frac{n+1}{n} x^{1/n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ converge para a função identicamente constante igual a 1.

Questão 2.

i. *Seja $f : K \to X$ uma aplicação contínua de um espaço compacto K em um espaço de Hausdorff localmente conexo por caminhos X. Mostre que as componentes conexas por caminhos de $X - f(K)$ são conjuntos abertos.*

ii. *Prove que $\mathbb{R}^2$ não é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ se $n \neq 2$.*

Questão 3. *Um espaço topológico X é dito ser* hiperconexo *se todo aberto não-vazio é denso em X. Um espaço topológico Y é dito ser* ultraconexo *se $\overline{\{a\}} \cap \overline{\{b\}} \neq \emptyset$ para quaisquer $a, b \in Y$.*

i. *Mostre que todo espaço topológico hiperconexo é conexo.*

ii. *Prove que um conjunto infinito Z quando munido com a topologia $\mathcal{T} = \{A \subset Z : A = \emptyset \text{ ou } Z - A \text{ é finito}\}$ torna-se um espaço hiperconexo, porém não ultraconexo.*

iii. *Considere Z um conjunto com mais de dois pontos. Dado $p \in Z$, equipe Z com a topologia $\mathcal{T} = \{A \subset Z : A = Z \text{ ou } p \notin A\}$. Mostre que o espaço topológico assim obtido é ultraconexo, contudo não é hiperconexo.*

iv. *Prove que um espaço topológico ultraconexo Y é conexo por caminhos demonstrando que, para quaisquer $a, b \in Y$ e qualquer $p \in \overline{\{a\}} \cap \overline{\{b\}}$, é contínua a aplicação $\gamma : [0,1] \to Y$ definida por*

$$\gamma(t) = \begin{cases} a & \text{se } 0 \leq t < 1/2 \\ p & \text{se } t = 1/2 \\ b & \text{se } 1/2 < t \leq 1 \end{cases}.$$

Questão 4. *Suponha que X é um espaço de Hausdorff localmente compacto e que A é subconjunto fechado não-vazio de X. Denote por $\omega(X - A) = (X - A) \cup \{\infty\}$ a compactificção a um ponto (compactificação de Alexandroff) de $X - A$. Denote por X/A o espaço quociente obtido ao identificar todos os pontos de A a um único ponto sem realizar nenhuma outra identificação.*

i. *Explique porque $X - A$ é um espaço de Hausdorff localmente compacto.*

ii. *Seja $f : X \to \omega(X - A)$ a aplicação sobrejetiva que se comporta como a identidade sobre $X - A$ e leva A em ∞. Mostre que f é contínua.*

iii. *Mostre que f induz uma bijeção contínua $\bar{f} : X/A \to \omega(X - A)$.*

iv. *Mostre que $\bar{f}$ é um homeomeorfismo se, e somente se, X/A é compacto.*

Questão 5. *Prove que o grupo fundamental do produto de dois espaços, $\pi(X \times Y, (x, y))$, é isomorfo ao produto direto dos respectivos grupos fundamentais, $\pi(X, x) \times \pi(Y, y)$.*