MM427 - 2S 2010 - Exame de Qualificação

Nome: ____ RA: __________ 10/12/2010

Em todas as questões a palavra "anel" significa anel comutativo com identidade não nula. Todo módulo é um módulo (unitário) sobre um anel. Sistemas multiplicativos não contém o zero. Escolha questões de modo que o total de pontos possíveis seja 100. Respostas sem justificativas não serão consideradas. Bom trabalho!

1. (05pts) Enuncie o teorema da Normalização de Noether.
2. (05pts) Enuncie o teorema estrutural dos anéis artinianos.
3. Determine se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa.
   (a) (06pts) Todo anel finitamente gerado de dimensão de Krull zero é finito.
   (b) (06pts) Se D é dominio fatorial e $(0) \neq \wp \in Spec(D)$ então $D_\wp$ é principal se e somente se $\wp$ tem altura 1.
   (c) (06pts) O subconjunto de torção de um módulo V é um submódulo de V.
   (d) (06pts) Se S é um sistema multiplicativo de um anel A e $S^{-1}A$ é um corpo, então A é um domínio.
   (e) (06pts) Se $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, onde $\mathbb{K}$ é um corpo, e I, J são ideais de A, então $V(I) \cap V(J) = V(IJ)$ (aqui $V(I) = \{(a_1, \cdots, a_n) \in K^n;\ f((a_1, \cdots, a_n)) = 0\ \forall f \in I\}$).
   (f) (06pts) Se $V \xrightarrow{\pi} W$ é um epimorfismo de A-módulos, onde A é um anel, então, para todo A-módulo M, o homomorfismo correspondente $\mathrm{Hom}_A(M, V) \xrightarrow{\overline{\pi}} \mathrm{Hom}_A(M, W)$ é sobrejetor.
4. Sejam A um anel e V um A-módulo livre finitamente gerado com base livre $\alpha = \{v_1, \cdots, v_n\}$. Mostre que
   (a) (06pts) Se $\beta = \{u_1, \cdots, u_n\} \subset V$ gera V então β é base livre de V.
   (b) (09pts) Se A é anel local com ideal maximal m, $k = A/\mathfrak{m}$ e $\pi : V \to V/\mathfrak{m}V$ é a projeção canônica então: $\gamma = \{w_1, \cdots, w_n\}$ é base livre de V se e somente se $\overline{\gamma} = \{\pi(w_1), \cdots, \pi(w_n)\}$ é base para o k-espaço vetorial $V/\mathfrak{m}V$.
5. (10pts) Seja $A = \mathbb{K}[x]$ onde $\mathbb{K}$ é um corpo. Encontre uma composição em série para o A-módulo $M = A/(f)$ onde $f(x) = x^3(x-1)$ e use-a para determinar as multiplicidades dos seus fatores simples.
6. Considere os anéis $A = \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ e $B = A/I$ onde $\mathbb{K}$ é um corpo e $I = (x_1 - x_2, x_3^2 - x_4)$.
   (a) (06pts) Calcule a dimensão de Krull de B.
   (b) (09pts) Calcule o grau de transcendência de B sobre $\mathbb{K}$.
7. Considere o anel $A = \mathbb{K}[x, y, z]$ e o ideal $I = (x^2, xy, xz, yz)$ onde $\mathbb{K}$ é um corpo.
   (a) (10pts) Mostre que $I = (x, y) \cap (x, z) \cap (x, y, z)^2$ é uma decomposição primária reduzida para I.
   (b) (06pts) Determine os primos isolados e mergulhados de I.
   (c) (06pts) Calcule $\sqrt{I}$.
8. Sejam B/A uma extensão de domínios e K = corpo de frações de A. Considere $I = \{a \in A;\ aB \subseteq A\}$ e assuma que A é noetheriano. Mostre que:
   (a) (06pts) $(0) \neq I$ se e somente se B é um A-módulo finitamente gerado e $B \subseteq K$.
   (b) (06pts) Se A é integralmente fechado então: $(0) \neq I$ se e somente se $A = B$.

Álgebra Não Comutativa, MM 444, Semestre 2, 2010
Exame de Qualificação, 10/12/2010

1. a) Definir grupo de *Brauer* de um corpo F. Qual o grupo de Brauer dos corpos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$?
b) Seja p um primo e seja $D = D_p$ o espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ com base 1, i, j, k. Definimos uma multiplicação em D como segue: $i^2 = -1$, $j^2 = p$, $ij = -ji = k$. Assuma a multiplicação associativa e satisfazendo as leis distributivas. Mostrar que D é uma álgebra associativa sobre $\mathbb{Q}$.
c) Mostrar que D é uma álgebra com divisão quando $p = 4k + 3$.
d) Mostrar que se p e q são dois tais primos, $p \neq q$, então D_p e D_q não são isomorfas. Mostrar que o grupo de Brauer de $\mathbb{Q}$ é infinito.

2. a) Definir ideal *primitivo* de um anel R. Enunciar o teorema sobre a Densidade.
b) Seja I um ideal primitivo de R, mostrar que I_n é um ideal primitivo em R_n. O recíproco também é válido? (Aqui R_n é o anel das matrizes $n \times n$ sobre R, e I_n é o conjunto das matrizes com todas as entradas em I.)
c) Deduzir de (b) que $J(R_n) = (J(R))_n$ onde $J(X)$ é o radical de Jacobson de X.

3. Seja X um conjunto não vazio e seja $L(X)$ a álgebra de Lie livre com conjunto de geradores livres X (sobre algum corpo K).
a) Definir base de *Hall* para $L(X)$. Se $X = \{x, y\}$, $x < y$, escrever em ordem crescente os elementos da base de Hall para $L(X)$ de grau ≤ 4.
b) Mostrar que se $L = L(X)$, então L^2 também é livre, e descrever um conjunto de geradores livres de L^2.
c) Sejam X e Y dois conjuntos de geradores livres, mostrar que $L(X) \cong L(Y)$ se, e somente se, $|X| = |Y|$.

4. Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre o corpo K, $1 \in A$. Seja B um subespaço de A, gerado por elementos nilpotentes de A, e suponha $B^2 \subseteq B$. Mostrar que $B^k = 0$ para algum número k, seguindo o caminho abaixo.
a) Mostrar que é suficiente considerar K algebricamente fechado.
b) Considerando-se a subálgebra $A_1 = B \oplus K$ de A, mostrar que basta considerar B um ideal em A.
c) Mostrar que se $J(A) = 0$ então $B = 0$.
d) Se $J(A) \neq 0$, considere $A/J(A)$ e $B + J(A)/J(A)$.

5. Responder **falsa** ou **verdadeira** a cada uma das perguntas abaixo. Justificar as respostas! (Resposta sem a devida justificativa não será considerada.)
a) Se G é um grupo finitamente gerado e tal que para todo $g \in G$ existe $n = n(g)$ com $g^n = 1$, então G é finito.
b) Se G é um grupo finito e K um corpo, então a álgebra de grupo KG é semi-simples.
c) O radical de Jacobson de todo anel noetheriano é nil.
d) O anel das transformações lineares de um espaço vetorial V de dimensão infinita, não é nem artiniano, nem noetheriano.

Boa Prova!

Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp
Exame de Equações Diferenciais Parciais I
15 de Dezembro de 2010

1. Questão. Resolva o seguinte problema $\partial_t u - 3\partial_x u + u = t$, com $u(x,0) = x^2$.

2. Questão. Seja Ω um aberto limitado em $\mathbb{R}^3$ e seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

(a) Seja $C \in \mathbb{R}$ e suponha que $u(x) \le C$ para $x \in \partial\Omega$ e que $\Delta u \ge 0$ em Ω. Mostre que $u \le C$.

(b) Suponha que $u \in C^0(\overline{\Omega})$ é harmônica em Ω e seja $C \equiv \sup_{x\in\partial\Omega} |u(x)|$. Dado $x_0 \in \Omega$, ache uma estimativa para $|\nabla u(x_0)|$ em termos de C e da distância de x_0 à fronteira de Ω.

3. Questão. Seja $D \equiv \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ o disco unitário no plano. Seja $u \in C^\infty(D \times (0,\infty))$ uma solução da equação do calor em D. Para $\theta \in (0, 2\pi)$ defina $v_\theta(x,t) \equiv u(R_\theta x, t)$, onde

$$R_\theta x = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} x.$$

Mostre que v_θ também é solução da equação do calor em D.

4. Questão. Seja Ω aberto limitado, com fronteira suave em $\mathbb{R}^3$, $a > \frac{1}{2}$ e $f \in C^0(\overline{\Omega})$. Seja u uma solução clássica do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + au = f, \text{ em } \Omega \\ u = 0, \text{ em } \partial\Omega \end{cases}.$$

Mostre que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \le C\|f\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Sugestão: Multiplique a equação por u e integre.

5. Questão. Para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, defina o operador $T_\varphi : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ por $\widehat{T_\varphi(u)} = \widehat{\varphi}\widehat{u}$.

(a) Mostre que T_φ é um operador contínuo em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

(b) Seja $k \in \mathbb{N}$ e considere o operador diferencial com coeficientes constantes $\mathcal{P}$ dado por

$$\mathcal{P}(u) = \sum_{|\alpha|\le k} c_\alpha D^\alpha u,$$

onde os c_α's são constantes. Mostre que T_φ comuta com $\mathcal{P}$, isto é, $T_\varphi(\mathcal{P}(u)) = \mathcal{P}(T_\varphi(u))$, para todo $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Exame de Qualificação do Doutorado
Análise Funcional - 15/12/2010
DM - IMECC - UNICAMP

Questão 1. Seja E um espaço de Hilbert e seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência ortogonal em E. Demonstre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge em E se, e somente se, a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ converge.

Questão 2. Seja $\alpha = (\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$ e $T : \ell_\infty \to \ell_\infty$ definido por $T\left((\xi_j)_{j=1}^{\infty}\right) = (\alpha_j\, \xi_j)_{j=1}^{\infty}$.
(a) Demonstre que $T \in L(\ell_\infty, \ell_\infty)$.
(b) Demonstre que T é compacto.

Questão 3. Seja E um espaço normado separável de dimensão infinita.
(a) Demonstre que existe uma sequência estritamente crescente $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ de subespaços de E de dimensão finita tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ é denso em E.
(b) Demonstre que existe uma sequência $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos do dual E' tal que $\|\varphi_n\| = 1$ e $\varphi_n = 0$ sobre M_n, para cada $n \in \mathbb{N}$.
(c) Demonstre que $\varphi_n(x) \to 0$ para cada $x \in E$.

Questão 4. Seja $(\alpha_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ para $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tal que, para cada $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in c_0$, a série $\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} x_j$ converge e $Tx = (\varphi_i(x))_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$.
(a) Demonstre que $\varphi_i \in c_0{}'$ para todo $i \in \mathbb{N}$.
(b) Demonstre que $T : c_0 \to \ell_\infty$ é linear e contínuo.

Questão 5. Seja E um espaço de Banach reflexivo. Dado $\varphi \in E'$, demonstre que existe $x \in E$ com $\|x\| \leq 1$, tal que $|\varphi(x)| = \|\varphi\|$. (**Sugestão:** use o Teorema de Alaoglu).

Exame de Qualificação

Geometria Riemanniana.

Dezembro de 2010

1. Em uma variedade riemanniana M^n, suponha que o tensor curvatura $R(U,V)W$ seja um campo paralelo ao longo de uma geodésica γ sempre que os campos U, V e W forem paralelos. Assuma que $p = \gamma(0)$. Mostre que:

   a) A transformação linear $K_V : T_pM \to T_pM$ dado por $W \mapsto R(V,W)V$ é auto-adjunta.

   b) Dados campos ortonormais paralelos $U_1, \ldots, U_n$ ao longo de γ, deduza as fórmulas dos campos de Jacobi em função dos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de K_V, separando os casos onde esses autovalores são positivos, nulos ou negativos. Conclua que se $\lambda_i > 0$ existem pontos conjugados a $\gamma(0)$ em múltiplos de $t = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_i}}$.

2. Enuncie e apresente sucintamente as principais etapas da demonstração do teorema do índice de Morse. Use esse teorema para provar que se um segmento de geodésica for minimizante então esse segmento não tem pontos conjugados. Dê um exemplo onde a recíproca não vale (i.e existência de cut locus sem existir conjugação).

3. Dê um exemplo de uma variedade riemanniana completa com curvatura seccional $K > 0$ que possui uma geodésica $\gamma : \mathbf{R} \to M$ que minimiza a distância entre $\gamma(0)$ e qualquer outro dos seus pontos $\gamma(t)$. No entanto, mostre que se as curvaturas seccionais K de M satisfaz $K \geq \delta > 0$, então toda geodésica γ de M passa por um ponto onde deixa de minimizar a distância entre $\gamma(0)$ e $\gamma(t)$ (i.e neste caso toda geodésica atinge o cut locus não vazio de $\gamma(0)$).

4. Considere uma geodésica $\gamma : [0,a] \to M$ com $\gamma(t_0)$, $t_0 < a$, o primeiro ponto conjugado a $\gamma(0)$ ao longo de γ, com multiplicidade d. Mostre como construir d campos de vetores l.i $X_1, \ldots, X_d$ ao longo de γ em $[0, t_0 + \varepsilon]$ de tal maneira que $I_{t_0+\varepsilon}(X_i, X_i) < 0$. Conclua que existe t tal que $\gamma(t)$ está no cut locus de $\gamma(0)$ para algum $t \leq t_0$.

5. Enuncie o teorema de Rauch e use-o para mostrar que se as curvaturas seccionais K de uma variedade riemanniana M satisfaz as desigualdades:

   $$0 < L \leq K \leq H$$

   com L, H constantes, então dada uma geodésica γ em M, a distância d ao longo de γ entre dois pontos conjugados consecutivos de γ satisfaz

   $$\frac{\pi}{\sqrt{H}} \leq d \leq \frac{\pi}{\sqrt{L}}.$$