

# A Álgebra Geométrica do Espaço-tempo e a Teoria da Relatividade

Jayme Vaz Jr.

*Departamento de Matemática Aplicada - IMECC*

*Universidade Estadual de Campinas*

*CP 6065, 13081-970, Campinas, S.P., Brasil*

*E-mail: vaz@ime.unicamp.br*

Recebido em 19 de Fevereiro, 1999

Neste artigo discutimos a álgebra geométrica do espaço-tempo de Minkowski e algumas das suas aplicações dentro da Teoria da Relatividade Restrita. Para isso fazemos inicialmente uma discussão e comparação entre espaços euclidianos e pseudo-euclidianos tomando como exemplo o plano. Rotações espaciais e hiperbólicas são discutidas em detalhes. As álgebras geométricas do plano euclidiano e do plano pseudo-euclidiano são discutidas detalhada e comparativamente. Discutimos o conceito de espaço-tempo e então a álgebra geométrica do espaço-tempo, em termos da qual discutimos depois os aspectos principais da Teoria da Relatividade Restrita. Uma das grandes vantagens do formalismo fica manifestada pois a álgebra geométrica do espaço-tempo é uma generalização quase trivial das outras consideradas.

## I Introdução

Uma das mais importantes consequências da Teoria da Relatividade (TR)<sup>1</sup> foi ter mostrado claramente a inadequação do conceito de *espaço* e *tempo* usados na Física Clássica. O “espaço físico” tridimensional da nossa percepção imediata não possui uma existência objetiva independente de cada um de nós. Segundo a TR, o espaço onde os eventos ocorrem é um espaço quadridimensional chamado *espaço-tempo*, composto não apenas pelas direções espaciais usuais mas também por uma direção de caráter temporal. Mais ainda, este espaço-tempo não possui uma estrutura euclidiana (como a do “espaço físico” tridimensional) mas sim uma estrutura pseudo-euclidiana.

Outras teorias, como por exemplo a Mecânica Quântica, certamente desafiam mais o senso comum do que a TR. Não por isso que a TR possa ser mais “fácil” ou “difícil” do que outras teorias. Sem dúvida é a *necessidade do pensamento quadridimensional* o obstáculo mais difícil de ser contornado para podermos apreciar e entender plenamente a TR. A dificuldade está na impossibilidade de visualização e nesse caso a única ferramenta (científica!) que nos resta para explorarmos o mundo quadridimensional é a Matemática.

A linguagem matemática é mais do que a linguagem

da Física: é a linguagem e a visão. Entretanto, não basta um bom treinamento matemático para podermos “ver” através de símbolos e equações. É preciso acima de tudo um *formalismo matemático adequado* para lidar com estes símbolos, de modo que as relações expressas pelas equações dentro deste formalismo possam ser plenamente compreendidas e interpretadas. Mais ainda, este formalismo deve ser *geral*, por exemplo no sentido em que possa ser utilizado no estudo de espaços bidimensionais, tridimensionais, quadridimensionais, etc. Com efeito, qual a utilidade para a TR de um formalismo matemático que só possa ser aplicado a um espaço tridimensional?

Esta é a situação da álgebra vetorial de Gibbs-Heaviside! Primeiro, devemos lembrar a importância de uma álgebra vetorial. De fato, várias quantidades físicas e geométricas têm natureza vetorial. Não apenas a definição de algumas destas quantidades como também certas relações dependem da definição de um *produto* de vetores. Um espaço vetorial equipado com um produto de vetores é o que denominamos uma álgebra vetorial. A álgebra vetorial de Gibbs-Heaviside é aquela na qual o produto de vetores é o conhecido *produto vetorial*, plenamente difundido entre os alunos de Física e outras Ciências desde o primeiro ano de estudos. Ocorre que este produto vetorial *não existe*

<sup>1</sup> Ao longo deste artigo consideraremos apenas a chamada Relatividade Restrita e não a Relatividade Geral. TR será portanto sinônimo aqui de TRR.

em espaços bidimensionais ou quadridimensionais, por exemplo. Ora, isto é um defeito imperdoável!<sup>2</sup> Uma estrutura matemática cuja aplicabilidade se limita unicamente a um espaço tridimensional não pode merecer muito crédito; ela é de fato estéril pois não pode ser reproduzida para outros espaços e portanto não permite que através de comparação e generalização outros mundos possam ser explorados matematicamente.

Paradoxalmente, decorrido quase um século da TR, a álgebra vetorial de Gibbs-Heaviside ainda é a estrutura algébrica básica envolvida sobretudo no ensino da Física Clássica. O que precisamos aqui é de uma outra estrutura matemática baseada em uma outra definição do produto de vetores em termos da qual possamos formular os conceitos e as teorias físicas que têm lugar em um espaço tridimensional mas que não esteja limitada a este espaço. Definitivamente a álgebra de Gibbs-Heaviside não é esta estrutura. Nesse caso a pergunta óbvia é: existe alguma alternativa?

Neste artigo pretendemos apresentar as chamadas *álgebras de Clifford ou álgebras geométricas* como esta alternativa e explorar sua utilização dentro da TR. Antes mesmo do advento da álgebra vetorial de Gibbs-Heaviside, W. K. Clifford apresentou esta estrutura – que ele denominou álgebras geométricas – que não contém certos problemas conceituais presentes na álgebra de Gibbs-Heaviside e que não está limitada a um espaço tridimensional. A diferença entre as álgebras geométricas e a álgebra de Gibbs-Heaviside está na definição do produto de vetores. O produto geométrico (ou de Clifford) de vetores não apenas pode ser definido em qualquer espaço vetorial como também contém mais informações do que o produto vetorial usual (quando este existe). Ele também possui outras vantagens como associatividade e existência de um elemento inverso, propriedades que não são satisfeitas pelo produto vetorial da álgebra de Gibbs-Heaviside. A álgebra geométrica do espaço euclidiano [1] permite uma completa formulação dos desenvolvimentos das áreas clássicas da Física (como por exemplo a Mecânica [2] e o Eletromagnetismo [3]) com várias vantagens sobre as formulações usuais. Uma das maiores vantagens, porém, aparece quando saímos do domínio clássico dos fenômenos e entramos no domínio quântico. De fato, dentro da álgebra geométrica está presente o conceito de *spinor* [1], que é o objeto matemático em termos do qual descrevemos quanticamente os férmions de spin 1/2 como o elétron. Consequentemente, o mesmo formalismo pode ser utilizado para descrever fenômenos clássicos ou quânticos!

Do ponto de vista do estudo da TR, existem duas grandes vantagens no formalismo das álgebras geométricas. Primeiro, a passagem do espaço tridimensional para o espaço-tempo quadridimensional dentro deste formalismo se faz simplesmente trocando (com as devidas adaptações)  $n = 3$  por  $n = 4$ . Depois existe a particularidade do espaço-tempo não ser euclidiano mas sim pseudo-euclidiano. Nesse ponto aparece a segunda vantagem. Podemos estudar e compreender as diferenças entre espaços euclidiano e pseudo-euclidiano estudando primeiro o exemplo bidimensional (plano) através das álgebras geométricas destes espaços. As modificações para o espaço-tempo quadridimensional são então novamente triviais.

As álgebras geométricas de Clifford são de certa forma o resultado da fusão (e posterior generalização) de dois sistemas: os quatérnions de Hamilton e a álgebra de extensão de Grassmann. Os quatérnions de Hamilton são uma generalização natural do sistema dos números complexos. Enquanto os números complexos estão associados com a geometria ortogonal do plano<sup>3</sup>, os quatérnions estão associados com a geometria ortogonal do espaço (tridimensional). Clifford mostrou como definir o produto quaterniônico em termos da álgebra de Grassmann. Como a álgebra de Grassmann é definida para qualquer espaço vetorial, independente da sua dimensão, Clifford pôde então generalizar este produto para um espaço vetorial arbitrário. Além desta generalização para um número arbitrário de dimensões, a correta formulação do problema permitiu também a sua generalização para outros espaços que não apenas os euclidianos (considerando então outras geometrias além da ortogonal). Por estes motivos, é natural utilizarmos uma álgebra geométrica para estudarmos a TR.

Nesse ponto deve estar claro que o problema capital é a *definição do produto de vetores*. Para sermos um pouco mais específicos (e adiantando um pouco o que discutiremos adiante), vamos detalhar a noção do produto geométrico de vetores. Podemos olhar a definição do produto de vetores dentro de uma álgebra geométrica partindo de um espaço vetorial equipado com uma forma bilinear e simétrica  $g$ . A quantidade  $g(\mathbf{v}, \mathbf{v})$  é uma quantidade escalar que associamos com o módulo do vetor  $\mathbf{v}$ . Dado

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + v_n \mathbf{e}_n, \quad (1)$$

para uma escolha conveniente da base  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  podemos escrever  $g(\mathbf{v}, \mathbf{v})$  de uma maneira geral na forma

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \pm(v_1)^2 \pm (v_2)^2 \pm \cdots \pm (v_n)^2. \quad (2)$$

<sup>2</sup>O produto vetorial apresenta ainda outros problemas além deste mas não é o caso aqui discutí-los. Uma discussão mais detalhada pode ser vista em [1].

<sup>3</sup>De fato, basta lembrar aqui a interpretação geométrica dos números complexos em termos do plano de Argand-Gauss-Wessel.

Esta expressão com os diversos sinais acima todos positivos é bem conhecida; o significado de expressões com sinais negativos será discutido adiante e por enquanto vamos apenas aceitá-las. O produto geométrico (ou de Clifford), que denotaremos simplesmente por justaposição – como em  $\mathbf{vu}$  significando o produto geométrico dos vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$  – é a álgebra associativa tal que o produto de vetores satisfaz

$$(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \dots + v_n\mathbf{e}_n)(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \dots + v_n\mathbf{e}_n) = \pm(v_1)^2 \pm (v_2)^2 \pm \dots \pm (v_n)^2. \quad (3)$$

Veremos adiante soluções deste problema. O que deve estar claro por enquanto é que o produto no lado esquerdo desta equação não se trata do produto escalar – o qual, entretanto, aparecerá como um caso particular do produto geométrico assim definido.

Este artigo está organizado da seguinte forma. Na próxima seção discutiremos as principais diferenças entre os espaços euclideo e pseudo-euclideo considerando como exemplo o plano. Depois exibiremos as álgebras geométricas do plano euclideo (sec.3) e do plano pseudo-euclideo (sec.4), procurando sempre que possível comparar estas duas para melhor entendermos as diferenças e similaridades entre elas. Na quinta seção discutiremos o conceito de espaço-tempo. Não pretendemos de maneira alguma fazer uma discussão detalhada do conceito de espaço-tempo dentro da TR. Iremos assumir alguma familiaridade com este conceito embora tentaremos desenvolver o assunto da maneira mais completa possível. Em outras palavras, não se deve esperar entender completamente o conceito de espaço-tempo e a própria TR através do conteúdo da sec.5; entretanto, esperamos fazê-la tão completa quanto possível para que não seja necessário (para aqueles não completamente familiarizados com estes conceitos) a consulta de referências complementares para o andamento da leitura do texto. Na sec.6 introduzimos e discutimos a álgebra geométrica do espaço-tempo. Como veremos, a definição desta álgebra se faz de uma maneira quase trivial comparada com as álgebras geométricas do plano euclideo e pseudo-euclideo. Algumas adaptações são necessárias, é verdade, mas todas são naturais e consequência da dimensão do espaço ser maior que a dos exemplos considerados. Esta sem dúvida é uma das grandes vantagens deste formalismo. Nesse ponto os principais aspectos da álgebra geométrica do espaço-tempo já foram discutidos nos exemplos das álgebras do plano e esperamos que se tornem mais facilmente compreensíveis. Finalmente na sec.7 discutimos os aspectos principais da cinemática e dinâmica relativísticas utilizando a álgebra geométrica do espaço-tempo. Como veremos, as fórmulas envolvi-

das na TR são demonstradas facilmente com esse formalismo. Na sec.8 apresentamos nossas considerações finais.

Embora não seja estritamente necessário nenhum conhecimento prévio das álgebras geométricas para a leitura deste artigo, *é muito recomendável* a leitura do nosso artigo acerca da álgebra geométrica do espaço euclideo [1], mais especificamente das suas segunda e terceira seções. Isto certamente ajudará muito na compreensão geral da estrutura das álgebras geométricas e da sua generalidade.

## II Espaços Euclideo versus Pseudo-Euclideo

As diferenças fundamentais entre os espaços euclideos e pseudo-euclideos podem ser apreendidas tomando como exemplo o plano. Os modelos em questão tratam de um espaço com apenas duas dimensões espaciais (no caso do plano euclideo) e de um espaço com apenas uma dimensão espacial e uma dimensão temporal (no caso do plano pseudo-euclideo).

Nosso ponto de partida é o plano por enquanto sem nenhuma estrutura métrica previamente definida. Seja  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  uma base do espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$ , de modo que um vetor arbitrário deste espaço é da forma  $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$ . Para evitar complicações desnecessárias vamos tomar os vetores  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$  ao longo das direções associadas com coordenadas cartesianas do plano. Muitos conceitos se aplicam nesse ponto; por exemplo, podemos falar em combinação linear, independência linear, espaço dual, transformações lineares, etc. Porém, para falarmos em ortogonalidade precisamos de uma estrutura métrica, ou seja, de uma aplicação (bilinear e simétrica)  $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Dois vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$  são ditos ortogonais se  $g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0$ .

A aplicação  $g$  é uma estrutura *adicional* sobre um espaço vetorial. Mais ainda, ela não precisa ser unicamente definida. Para o caso de um espaço euclideo e em termos da base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  a aplicação  $g$  é da forma  $g_E$  dada por

$$\begin{aligned} g_E(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) &= g_E(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 1, \\ g_E(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) &= g_E(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Com isso segue usando a propriedade de bilinearidade que

$$g_E(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (v_1)^2 + (v_2)^2 = |\mathbf{v}|^2. \quad (5)$$

Como vemos,  $g_E(\mathbf{v}, \mathbf{v})$  está relacionada com o chamado produto escalar.

O ponto fundamental aqui é que o espaço euclideo é *definido* por esta aplicação  $g_E$ . Em outras palavras,

o adjetivo *euclidiano* se aplica ao espaço equipado com esta *forma particular*<sup>4</sup> da aplicação  $g$ . Para uma outra definição de  $g$  a estrutura métrica adicional do espaço vetorial poderá apresentar propriedades distintas daquelas de um espaço euclidiano.

Podemos pensar em definir outras aplicações  $g$  e consequentemente outros tipos de espaço. Por exemplo, podemos considerar  $g_{AE}$  dada por

$$\begin{aligned} g_{AE}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) &= g_{AE}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = -1, \\ g_{AE}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) &= g_{AE}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

de modo que

$$g_{AE}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = -(v_1)^2 - (v_2)^2 = -|\mathbf{v}|^2. \quad (7)$$

Chamaremos um espaço vetorial com esta aplicação  $g_{AE}$  de *anti-euclidiano*.

Apesar do prefixo “anti” sugerir alguma propriedade “às avessas” deste espaço, ele ainda é *essencialmente euclidiano*. Por exemplo, tanto num espaço euclidiano quanto num espaço anti-euclidiano vale o teorema de Pitágoras. A diferença entre estes espaços é que enquanto em um espaço euclidiano temos  $g_E(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$ ,  $\forall \mathbf{v}$ , em um espaço anti-euclidiano temos  $g_{AE}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq 0$ ,  $\forall \mathbf{v}$ . Uma vez que usamos  $g$  para definir o módulo  $|\mathbf{v}|$  de um vetor  $\mathbf{v}$ , no caso euclidiano definimos  $|\mathbf{v}|^2 = g_E(\mathbf{v}, \mathbf{v})$  e no caso anti-euclidiano definimos  $|\mathbf{v}|^2 = -g_{AE}(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ . Com isso nos dois espaços temos  $|\mathbf{v}| \geq 0$ .

Por outro lado, poderíamos ter simplesmente definido  $|\mathbf{v}|^2 = g(\mathbf{v}, \mathbf{v})$  tanto para  $g = g_E$  como para  $g = g_{AE}$ . Nesse caso teríamos  $|\mathbf{v}|_E^2 \geq 0$  mas  $|\mathbf{v}|_{AE}^2 \leq 0$ . A diferença entre estes dois casos é *completamente irrelevante*. O importante é que  $|\mathbf{v}|^2$  em qualquer um destes casos ou é *sempre não-negativo* ou é *sempre não-positivo*. Um leitor mais preocupado pode estar se perguntando: mas o módulo não é uma quantidade sempre não-negativa? Sim, para o caso envolvendo números! Entretanto, o que temos aqui são vetores e não números. O importante é que não tenhamos aqui *ao mesmo tempo* casos em que o módulo seja positivo e casos em que o módulo seja negativo. Para um leitor que esteja um tanto confuso talvez seja melhor pensar em dois conceitos distintos: módulo e valor absoluto. Podemos então pensar em valor absoluto como uma quantidade sempre não-negativa e tal que o módulo seja ou igual ao valor absoluto ou igual ao oposto do valor absoluto conforme cada um dos casos acima. Mais uma vez, o importante aqui é que para *todos* os vetores a quantidade  $g(\mathbf{v}, \mathbf{v})$  ou é sempre não-negativa ou é sempre não-positiva.

O caso realmente distinto ocorre quando temos um espaço onde podemos ter vetores tais que  $g(\mathbf{v}, \mathbf{v})$  seja

positivo, negativo ou nulo. Isso acontece para  $g_{PE}$  dado por

$$\begin{aligned} g_{PE}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) &= -g_{PE}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 1, \\ g_{PE}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) &= g_{PE}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Nesse caso encontramos que

$$g_{PE}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (v_1)^2 - (v_2)^2. \quad (9)$$

Evidentemente  $g_{PE}(\mathbf{v}, \mathbf{v})$  pode ser positivo, negativo ou nulo conforme tenhamos  $v_1 > v_2$ ,  $v_1 < v_2$  ou  $v_1 = v_2$ , respectivamente. Um espaço (neste caso o plano) equipado com  $g$  da forma  $g_{PE}$  é chamado um *espaço pseudo-euclidiano*.

Para entendermos um pouco melhor a diferença entre espaços euclidiano e pseudo-euclidiano vamos olhar com mais detalhes para as equações (5) e (9). Primeiro, vamos olhar para a eq.(5). Vamos considerar o conjunto de vetores tais que

$$(v_1)^2 + (v_2)^2 = r^2 = \text{constante}, \quad (10)$$

ou equivalentemente

$$\left(\frac{v_1}{r}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{r}\right)^2 = 1. \quad (11)$$

Esta equação nada mais é do que a equação de uma circunferência de raio unitário.

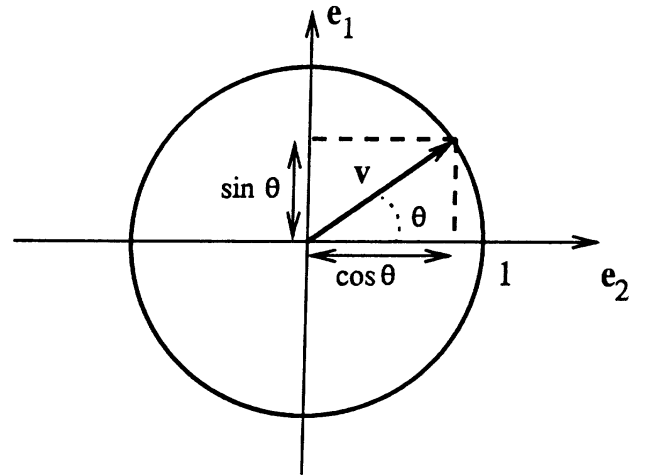


Figura 1. Uma circunferência de raio unitário parametrizada pelo ângulo  $\theta$ .

Como é bem sabido, uma circunferência pode ser parametrizada através de um ângulo  $\theta$ . Olhando para a eq.(11) e lembrando a conhecida relação entre as funções seno e co-seno,

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1, \quad (12)$$

<sup>4</sup> A eq.(4) depende da base escolhida. Para uma outra base as expressões dadas pela eq.(4) podem ser diferentes. Para não entrarmos nestes detalhes durante esta discussão estamos assumindo que a base que escolhemos está fixada.

vemos que podemos escrever

$$v_1 = r \cos \theta, \quad v_2 = r \sin \theta. \quad (13)$$

É oportuno lembrarmos aqui a expressão para as funções seno e co-seno em termos da exponencial complexa, ou seja,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad (14)$$

ou ainda

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad (15)$$

onde  $i$  é a unidade imaginária ( $i^2 = -1$ ).

O conjunto de vetores que satisfaz a condição  $|\mathbf{v}| = r = \text{constante}$  pode portanto ser escrito na forma

$$\mathbf{v} = r(\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2). \quad (16)$$

Qualquer um dos vetores que satisfazem a condição  $|\mathbf{v}| = r$  pode ser obtido a partir de um outro satisfazendo esta condição através de uma *rotação* por um ângulo apropriado. Vale lembrar que em uma rotação as componentes de um vetor  $\mathbf{v}$  mudam de acordo com

$$\begin{aligned} v'_1 &= v_1 \cos \alpha + v_2 \sin \alpha, \\ v'_2 &= -v_1 \sin \alpha + v_2 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (17)$$

onde  $\alpha$  é o ângulo de rotação.

Vamos agora olhar para a eq.(9) e considerar a condição análoga à da eq.(10), ou seja,

$$(v_1)^2 - (v_2)^2 = \text{constante}. \quad (18)$$

Aqui, entretanto, ao contrário do caso euclidiano, devemos distinguir três casos: esta constante pode ser positiva, negativa ou nula. Vamos primeiro considerar o caso (I) em que esta constante é positiva, ou seja,

$$(v_1)^2 - (v_2)^2 = r^2, \quad (19)$$

ou ainda

$$\left(\frac{v_1}{r}\right)^2 - \left(\frac{v_2}{r}\right)^2 = 1 \quad \text{(I)} \quad (20)$$

Esta é a equação de uma *hipérbole* (em particular de uma hipérbole equilátera).

Para o caso (II) em que a constante é negativa podemos escrever

$$(v_1)^2 - (v_2)^2 = -r^2, \quad (21)$$

ou ainda

$$\left(\frac{v_2}{r}\right)^2 - \left(\frac{v_1}{r}\right)^2 = 1 \quad \text{(II)} \quad (22)$$

que também é a equação de uma hipérbole.

Já no caso (III) em que a constante é nula temos

$$(v_1)^2 - (v_2)^2 = 0 \quad \text{(III)} \quad (23)$$

ou seja,

$$v_1 = \pm v_2. \quad (24)$$

Estas são as equações das assíntotas das hipérboles acima. Estes casos estão desenhados na figura abaixo.

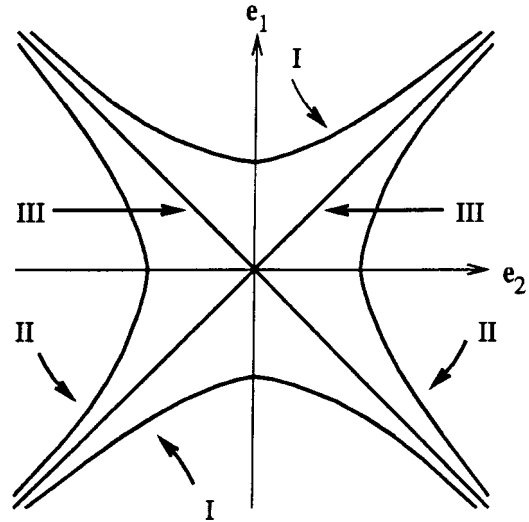


Figura 2. Curvas correspondentes aos caos (I), (II) e (III) discutidos no texto.

Do mesmo modo que a circunferência, que pode ser parametrizada pelo ângulo, podemos parametrizar a hipérbole através de uma quantidade que denominaremos ângulo hiperbólico. Apesar do nome, este ângulo hiperbólico nada tem a ver com o ângulo definido em circunferência (que diremos ângulo trigonométrico ao invés de simplesmente ângulo quando houver possibilidade de confusão). Esta denominação entretanto é plenamente justificada uma vez que esta quantidade desempenha o mesmo papel para uma hipérbole que o ângulo trigonométrico para uma circunferência.

As funções seno hiperbólico e co-seno hiperbólico são definidas como

$$\cosh \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}, \quad \sinh \theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}, \quad (25)$$

de modo que

$$e^\theta = \cosh \theta + \sinh \theta. \quad (26)$$

Aqui o argumento destas funções (o ângulo hiperbólico) é tal que  $-\infty < \theta < \infty$ . Podemos verificar facilmente da definição acima que estas funções satisfazem

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1. \quad (27)$$

É oportuno agora compararmos estas equações com as equações (12), (14) e (15). Na Fig. 3 ilustramos a situação para uma hipérbole equilátera.

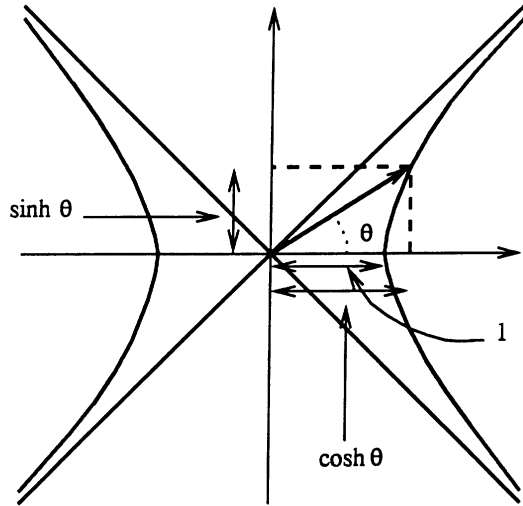


Figura 3. Uma hipérbole equilátera com semi-eixo unitário parametrizada através do ângulo hiperbólico  $\theta$ .

Para completar a analogia, vamos considerar o conjunto de vetores satisfazendo a condição (19) ou (20), por exemplo. Nesse caso podemos escrever

$$v_1 = r \cosh \theta, \quad v_2 = r \sinh \theta. \quad (28)$$

O conjunto dos vetores satisfazendo esta condição pode portanto ser escrito na forma

$$\mathbf{v} = r(\cosh \theta \mathbf{e}_1 + \sinh \theta \mathbf{e}_2). \quad (29)$$

Qualquer um dos vetores satisfazendo esta condição pode ser obtido a partir de um outro através de uma *rotação hiperbólica*. Através de uma rotação hiperbólica por um ângulo hiperbólico  $\alpha$  as componentes de um vetor  $\mathbf{v}$  mudam de acordo com

$$\begin{aligned} v'_1 &= v_1 \cosh \alpha + v_2 \sinh \alpha, \\ v'_2 &= v_1 \sinh \alpha + v_2 \cosh \alpha. \end{aligned} \quad (30)$$

Podemos agora comparar esta equação com a eq.(II). Note que enquanto temos  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$  e  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$  aqui temos  $\cosh(-\alpha) = \cosh \alpha$  e  $\sinh(-\alpha) = -\sinh \alpha$ . Uma rotação hiperbólica está ilustrada na Fig.4.

Iremos denominar (por motivos que ficarão claros adiante) os vetores tais que  $(v_1)^2 - (v_2)^2 > 0$  de vetores *tipo-tempo*. Os vetores que satisfazem  $(v_1)^2 - (v_2)^2 < 0$  serão chamados vetores *tipo-espaço*. Finalmente, os vetores tais que  $(v_1)^2 - (v_2)^2 = 0$  serão chamados vetores *tipo-luz*. Por exemplo, Fig. 4 ilustra uma rotação hiperbólica envolvendo dois vetores tipo-tempo.

Como vemos, existem grandes diferenças entre espaços euclideo e pseudo-euclideo. Não por isso, entretanto, que eles não podem ser tratados de maneira análoga. Basta para isso fazermos as devidas adaptações!

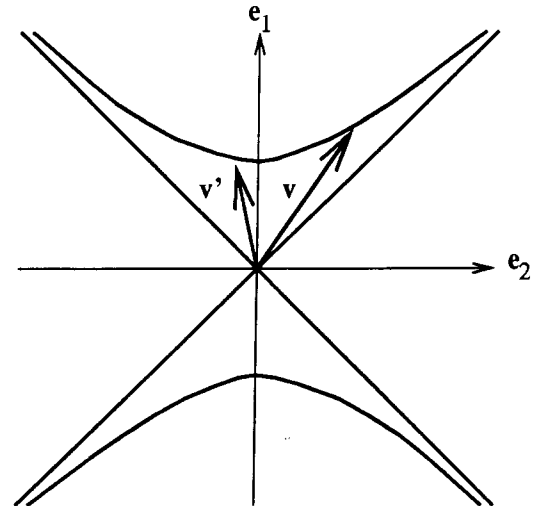


Figura 4. Rotação hiperbólica do vetor  $\mathbf{v}$  resultando no vetor  $\mathbf{v}'$ .

### III A álgebra geométrica do plano Euclideo

Como já adiantamos na introdução a álgebra geométrica é baseada na definição de um produto de vetores tal que vale a eq.(3). Para o plano euclideo o produto geométrico deve ser tal que

$$(v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2)(v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2) = (v_1)^2 + (v_2)^2. \quad (31)$$

Desenvolvendo o lado esquerdo desta equação (assumindo distributividade) temos

$$\begin{aligned} (v_1)^2 (\mathbf{e}_1)^2 + v_1 v_2 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) + (v_2)^2 (\mathbf{e}_2)^2 \\ = (v_1)^2 + (v_2)^2. \end{aligned} \quad (32)$$

Para que esta equação tenha solução devemos ter

$$(\mathbf{e}_1)^2 = 1, \quad (33)$$

$$(\mathbf{e}_2)^2 = 1, \quad (34)$$

$$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 = 0. \quad (35)$$

Estas relações definem o produto geométrico da álgebra geométrica do plano euclideo e com elas podemos calcular o produto geométrico de um número qualquer de vetores. Por exemplo, o produto  $\mathbf{v}\mathbf{u}$  resulta em

$$\begin{aligned} \mathbf{v}\mathbf{u} &= (v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2)(u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2) \\ &= v_1 u_1 (\mathbf{e}_1)^2 + v_1 u_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + v_2 u_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + v_2 u_2 (\mathbf{e}_2)^2 \\ &= (v_1 u_1 + v_2 u_2) + (v_1 u_2 - v_2 u_1) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (36)$$

O primeiro termo no lado direito da última igualdade possui uma interpretação óbvia: trata-se do conhecido produto escalar dos vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$ . Agora, qual o significado do segundo termo, ou seja, da quantidade  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ ?

A interpretação da quantidade  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$  já foi discutida em [1]. Entretanto, devido à sua importância, é oportuno e desejável discutirmos novamente esta questão.

Para isto vamos nos basear em um fato notório: em um plano existem pontos, retas (e segmentos de reta) e o plano (e fragmentos do plano).

Primeiro, a quantidade  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$  não é uma quantidade escalar. Para vermos isso basta notarmos que o produto de  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$  com um vetor arbitrário não é comutativo (o que deveria acontecer se esta quantidade fosse um escalar). De fato, tomando como exemplo específico  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1$  e usando a propriedade de associatividade mais as relações (33-35) temos por um lado

$$(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1 = -(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_2, \quad (37)$$

e por outro lado

$$\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2. \quad (38)$$

Tampouco  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$  é um vetor (no sentido de ser um elemento do espaço  $\mathbb{R}^2$  ao qual pertence um vetor  $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$ ). De fato, nesse caso temos  $\mathbf{v}\mathbf{v} = (v_1)^2 + (v_2)^2 \geq 0$  enquanto para  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$  temos

$$(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -(\mathbf{e}_1)^2(\mathbf{e}_2)^2 = -1. \quad (39)$$

A sugestão acerca da interpretação de  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$  vem do coeficiente multiplicando esta quantidade no lado direito da eq.(36). A quantidade  $|v_1u_2 - v_2u_1|$  é justamente a *área* do paralelogramo definido pelos vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$ . Enquanto  $\sqrt{|\mathbf{v}\mathbf{v}|}$  nos fornece o *comprimento* do segmento de reta orientado definido pelo vetor  $\mathbf{v}$ , a quantidade

$$\sqrt{|(v_1u_2 - v_2u_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2(v_1u_2 - v_2u_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2|}$$

nos fornece justamente a *área* do paralelogramo definido pelos vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$ . A quantidade  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$  está relacionada portanto com uma área e não com um comprimento, como é o caso dos vetores  $\mathbf{e}_1$  ou  $\mathbf{e}_2$  (ou combinações lineares destes). A quantidade  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$  é um exemplo do que chamaremos um *bivetor* ou *2-vetor*. Quantidades deste tipo formam um espaço vetorial e são portanto vetores, mas para estabelecer uma distinção com os vetores  $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$  usamos a denominação bivetor ou 2-vetor (lembrando assim que eles estão relacionados com áreas) – nesse caso os vetores  $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$  serão, quando conveniente, também denominados 1-vetores.

O bivetor  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$  pode portanto ser interpretado como descrevendo um fragmento de plano unitário e orientado. A orientação segue naturalmente uma vez que  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$ , ou seja, os bivectores  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$  descrevem fragmentos de plano com orientações opostas – do mesmo modo que os vetores  $\mathbf{v}$  e  $-\mathbf{v}$  descrevem segmentos de reta com orientações opostas. As orientações de um fragmento de plano são definidas conforme percorremos a sua fronteira no sentido *horário* ou *anti-horário*, como na Fig.5.

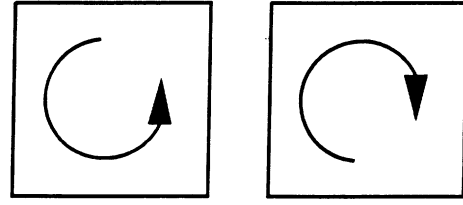


Figura 5. As duas orientações possíveis de um fragmento de plano.

Para generalizarmos um pouco mais a interpretação acima precisamos voltar um pouco à eq.(36). Podemos ver facilmente que a parte escalar do produto  $\mathbf{v}\mathbf{u}$  consiste justamente na parte simétrica deste produto, ou seja, é dada por

$$(v_1u_1 + v_2u_2) = \frac{\mathbf{v}\mathbf{u} + \mathbf{u}\mathbf{v}}{2} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad (40)$$

enquanto a parte anti-simétrica é dada por

$$(v_1u_2 - v_2u_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{v}\mathbf{u} - \mathbf{u}\mathbf{v}}{2} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = -\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}. \quad (41)$$

Nas últimas igualdades destas equações aproveitamos para *definir*  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$  e  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ . Com isso podemos escrever

$$\mathbf{v}\mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}. \quad (42)$$

É oportuno notarmos que em geral  $\mathbf{v}\mathbf{u} \neq \pm\mathbf{u}\mathbf{v}$ . Podemos ainda ver que  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$  e que  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = -\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ . Não deve ser difícil nos convenceremos agora que é a quantidade  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$  que descreve o fragmento de plano orientado definido pelos vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$ . Podemos convenicionar agora que esta orientação se faz no sentido em que percorremos a fronteira do paralelogramo definido por  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$  primeiro através do segmento de reta orientado definido por  $\mathbf{v}$  e depois pelo segmento de reta orientado definido por  $\mathbf{u}$  convenientemente deslocado de modo que a sua extremidade inicial coincida com a extremidade final do outro segmento. O bivetor  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$  define um fragmento de plano com a orientação oposta.

O conjunto dos elementos da forma  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$  com  $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$  formam um espaço vetorial que denotaremos por  $\wedge^2(\mathbb{R}^2)$ . Seus elementos são os chamados bivectores ou 2-vetores. É fácil vermos que a dimensão de  $\wedge^2(\mathbb{R}^2)$  é 1. Para usarmos uma notação uniforme, vamos aproveitar e definir  $\wedge^0(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$  e  $\wedge^1(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ . Elementos de  $\wedge^k(\mathbb{R}^2)$  são ditos em geral *k-vetores* (um 0-vetor é portanto um escalar).

A eq.(36) nos mostra que o resultado do produto geométrico de dois vetores consiste na soma de uma quantidade escalar e uma quantidade bivectorial. Isso mostra que do ponto de vista algébrico para trabalharmos com uma estrutura fechada (ou seja, uma operação envolvendo dois elementos deste conjunto resulta em um outro elemento deste conjunto) devemos considerar o espaço vetorial definido pela soma (direta) dos espaços vetoriais  $\wedge^0(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$ ,  $\wedge^1(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$  e  $\wedge^2(\mathbb{R}^2)$ . Denotaremos este espaço vetorial por  $\wedge(\mathbb{R}^2)$ , ou seja,

$$\bigwedge(\mathbb{R}^2) = \bigwedge^0(\mathbb{R}^2) \oplus \bigwedge^1(\mathbb{R}^2) \oplus \bigwedge^2(\mathbb{R}^2). \quad (43)$$

Os elementos de  $\bigwedge(\mathbb{R}^2)$  são denominados *multivetores*. Um multivetor arbitrário nesse caso é da forma

$$\bigwedge(\mathbb{R}^2)\psi = \underbrace{a}_{\text{escalar}} + \underbrace{v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2}_{\text{vetor}} + \underbrace{b\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2}_{\text{bivetor}}. \quad (44)$$

O espaço vetorial  $\bigwedge(\mathbb{R}^2)$  equipado com o produto geométrico definido pelas eqs.(33-35) é o que chamamos *álgebra geométrica do plano euclidiano*. São as relações  $(\mathbf{e}_1)^2 = (\mathbf{e}_2)^2 = 1$  que definem o plano como *euclidiano*. No caso pseudo-euclidiano teremos relações diferentes para estas quantidades. Iremos denotar esta álgebra geométrica do plano euclidiano por  $\mathcal{Cl}_2$ .

Antes de prosseguirmos, é conveniente definirmos algumas operações dentro de  $\mathcal{Cl}_2$ . Primeiro, os operadores de projecção  $\langle \rangle_k : \bigwedge(\mathbb{R}^2) \rightarrow \bigwedge^k(\mathbb{R}^2)$ . Em outras palavras,  $\langle \psi \rangle_k$  denota a parte  $k$ -vetor do multivetor  $\psi$ . Por exemplo, para  $\psi$  da forma da eq.(44) temos

$$\langle \psi \rangle_0 = a, \quad \langle \psi \rangle_1 = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2, \quad \langle \psi \rangle_2 = b\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2. \quad (45)$$

As outras operações são as chamadas *involução graduada*, *reversão* e *conjugação*. A involução graduada, denotada por um chapéu, é definida de modo que

$$\widehat{\langle \psi \rangle_k} = (-1)^k \langle \psi \rangle_k, \quad (46)$$

ou seja, troca o sinal da parte 1-vetor mas mantém o sinal das partes escalar e 2-vetor de um multivetor. A reversão, denotada por um til, é definida como

$$\widetilde{\langle \psi \rangle_k} = (-1)^{k(k-1)/2} \langle \psi \rangle_k. \quad (47)$$

O nome reversão se deve ao fato dela ser equivalente a considerarmos o produto de vetores na ordem reversa, ou seja,

$$\widetilde{\mathbf{v}\mathbf{u}} = \mathbf{u}\mathbf{v}. \quad (48)$$

A reversão altera apenas o sinal da parte 2-vetor de um multivetor em  $\mathcal{Cl}_2$ . Finalmente a conjugação, que denotamos por uma barra, consiste na composição das outras duas operações, ou seja,

$$\bar{\psi} = \widehat{\widetilde{\psi}} = \widetilde{\widehat{\psi}}. \quad (49)$$

Uma das grandes vantagens do produto geométrico é que em muitos casos podemos “dividir” vetores e até mesmo multivetores. De fato, para um vetor  $\mathbf{v}$  temos  $\mathbf{v}\mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$ , de modo que se  $|\mathbf{v}| \neq 0$  temos

$$\mathbf{v}^{-1} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}, \quad (50)$$

onde  $\mathbf{v}^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{v}\mathbf{v}^{-1} = 1$ . O mesmo acontece, por exemplo, para o bivetor  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ , onde definimos  $(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^{-1} = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$ . Entretanto, não é sempre que isto é

possível. Por exemplo, vamos considerar o multivetor  $f$  dado por

$$f = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_1). \quad (51)$$

Como podemos ver facilmente temos  $f^2 = f$ . Para este elemento *não existe*  $f^{-1}$  tal que  $f^{-1}f = ff^{-1} = 1$ .

De uma maneira geral, para um multivetor arbitrário  $\psi$  definimos

$$|\psi|^2 = \langle \widetilde{\psi}\psi \rangle_0. \quad (52)$$

Então, se

$$\widetilde{\psi}\psi = \langle \widetilde{\psi}\psi \rangle_0 \neq 0, \quad (53)$$

ou seja, o produto geométrico  $\widetilde{\psi}\psi$  possui apenas *parte escalar* (e não-nula), podemos definir  $\psi^{-1}$  como

$$\psi^{-1} = \frac{\widetilde{\psi}}{|\psi|^2}. \quad (54)$$

Antes de prosseguirmos devemos notar a presença da operação de reversão na eq.(52). Pela definição desta operação (eq.47) podemos ver que ela não altera o sinal de escalares e vetores mas altera o sinal de um bivetor. Como para um bivetor  $B$  temos  $B^2 \leq 0$  a presença da reversão na eq.(52) assegura que teremos  $|B|^2 \geq 0$ . Aliás, utilizando este fato podemos deduzir um importante resultado.

Usando a eq.(42) e a eq.(40) podemos escrever

$$\begin{aligned} |\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}|^2 &= (\mathbf{v} \wedge \mathbf{u})(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \\ &= (\mathbf{v}\mathbf{u} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{u}\mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{v}\mathbf{u}\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v}\mathbf{u} + \mathbf{u}\mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})^2 \\ &= |\mathbf{v}|^2|\mathbf{u}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2. \end{aligned} \quad (55)$$

Como  $|\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}|^2 \geq 0$  para  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} \in \bigwedge^2(\mathbb{R}^2)$  segue que

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \leq |\mathbf{v}|^2|\mathbf{u}|^2, \quad (56)$$

ou seja,

$$-|\mathbf{v}||\mathbf{u}| \leq \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \leq |\mathbf{v}||\mathbf{u}|. \quad (57)$$

Devido a esta expressão podemos *definir o ângulo* entre os vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$  através de

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{v}||\mathbf{u}|}. \quad (58)$$

Podemos notar ainda que

$$\sin \theta = \frac{|\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}|}{|\mathbf{v}||\mathbf{u}|}. \quad (59)$$

Dessa forma temos  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

A eq.(57) também pode ser usada para chegarmos à chamada desigualdade triangular. De fato, calculando  $|\mathbf{v} + \mathbf{u}|$  encontramos

$$\begin{aligned} |\mathbf{v} + \mathbf{u}|^2 &= |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}|^2 + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \\ &\leq |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{v}||\mathbf{u}| \\ &\leq (|\mathbf{v}| + |\mathbf{u}|)^2, \end{aligned} \quad (60)$$



ou seja,

$$|\mathbf{v} + \mathbf{u}| \leq |\mathbf{v}| + |\mathbf{u}|, \quad (61)$$

que é a *desigualdade triangular*.

Posto isso, vamos agora ver como expressar algumas relações e operações geométricas utilizando a álgebra  $\mathcal{Cl}_2$ . Primeiro, diremos que dois vetores são *ortogonais* se o produto geométrico destes vetores for anti-comutativo, ou seja, se  $\mathbf{v}\mathbf{u} = -\mathbf{u}\mathbf{v}$ ; por outro lado, diremos que dois vetores são *colineares* se o produto geométrico for comutativo, ou seja, se  $\mathbf{v}\mathbf{u} = \mathbf{u}\mathbf{v}$ .

Dados dois vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$  podemos facilmente decompor um destes vetores em partes colinear e ortogonal ao outro; por exemplo, dado o vetor  $\mathbf{v}$  queremos escrever  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$ , onde  $\mathbf{v}_{\parallel}$  é a parte colinear ao vetor  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}_{\perp}$  é a parte ortogonal ao vetor  $\mathbf{u}$ . Usando  $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u}\mathbf{u}$  podemos ver facilmente com a ajuda da eq.(50) que

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \frac{1}{2} (\mathbf{v} + \mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{u}^{-1}), \quad \mathbf{v}_{\perp} = \frac{1}{2} (\mathbf{v} - \mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{u}^{-1}), \quad (62)$$

são as expressões procuradas uma vez que  $\mathbf{v}_{\parallel}\mathbf{u} = \mathbf{u}\mathbf{v}_{\parallel}$  e  $\mathbf{v}_{\perp}\mathbf{u} = -\mathbf{u}\mathbf{v}_{\perp}$ .

Vamos agora expressar uma reflexão em termos do produto geométrico. No caso tridimensional fazemos uma reflexão através de um plano – no caso  $n$ -dimensional devemos considerar um hiperplano (ou seja, um subespaço  $n - 1$ -dimensional) – mas como estamos lidando por enquanto apenas com o caso bidimensional devemos então considerar uma reta. Seja  $\mathbf{u}$  o vetor unitário perpendicular a esta reta, como mostra a Fig.6.

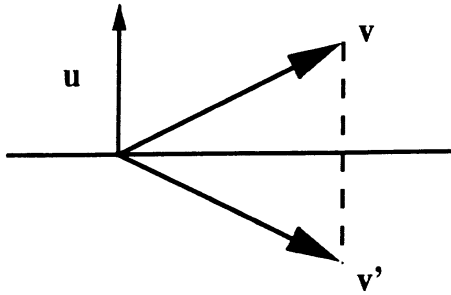


Figura 6. Reflexão através do hiper-plano ortogonal ao vetor  $\mathbf{u}$  do vetor  $\mathbf{v}$  resultando no vetor  $\mathbf{v}'$ .

O vetor  $\mathbf{v}'$  é o vetor resultante da reflexão do vetor  $\mathbf{v}$ . É fácil vermos que

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - 2\mathbf{v}_{\parallel}, \quad (63)$$

onde  $\mathbf{v}_{\parallel}$  é a componente de  $\mathbf{v}$  colinear com o vetor  $\mathbf{u}$ . Usando então a eq.(62) encontramos que

$$\mathbf{v}' = -\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{u}^{-1}, \quad (64)$$

ou nesse caso que

$$\mathbf{v}' = -\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{u}, \quad (65)$$

onde usamos ainda que  $\mathbf{u}$  é unitário, ou seja,  $|\mathbf{u}| = 1$  de modo que  $\mathbf{u}^{-1} = \mathbf{u}$ .

Para expressarmos uma rotação vamos utilizar um importante resultado devido a Cartan e Dieudonné [4] que diz que *a composição de duas reflexões é uma rotação*. O teorema de Cartan-Dieudonné na verdade faz uma afirmação mais geral que esta mas não precisamos entrar nestes detalhes aqui (e tampouco discutir a demonstração deste teorema). Com isso e mais a eq.(65) segue que uma rotação pode ser escrita na forma

$$\mathbf{v}' = -\mathbf{u}_1(-\mathbf{u}_2\mathbf{v}\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_1, \quad (66)$$

onde  $|\mathbf{u}_1| = |\mathbf{u}_2| = 1$ . Esta expressão pode ser escrita de uma maneira mais conveniente como

$$\mathbf{v}' = R\mathbf{v}R^{-1}, \quad (67)$$

onde  $R$  é da forma

$$R = \mathbf{u}_1\mathbf{u}_2, \quad (68)$$

e  $R^{-1} = \mathbf{u}_2\mathbf{u}_1 = \tilde{R}$ .

Para entendermos melhor o objeto  $R$  vamos primeiro utilizar a eq.(42) para reescrevê-lo como

$$R = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2. \quad (69)$$

Como  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$  são unitários, usando as eqs.(58) e (59) temos

$$R = \cos \theta + \sin \theta B, \quad (70)$$

onde  $B$  é um bivetor unitário. Nesse caso, só existem duas possibilidades: ou  $B = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$  ou  $B = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ . Porém, estas duas possibilidades podem ser consideradas de uma única maneira. De fato, devido às eqs.(58) e (59),  $\theta$  na eq.(70) é tal que  $0 \leq \theta \leq \pi$ , e portanto  $\sin \theta \geq 0$ . Se escolhermos, por exemplo,  $B = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ , a outra possibilidade (que difere desta pelo sinal oposto) pode ser levada em conta tomando  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  uma vez que para  $\pi \leq \theta \leq 2\pi$  temos  $\sin \theta \leq 0$ . Portanto, de uma maneira geral, podemos escrever

$$R = \cos \theta + \sin \theta \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1, \quad (71)$$

onde  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Podemos ainda definir a exponencial de um multivetor  $\psi$  como

$$\exp \psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi^n}{n!} = 1 + \psi + \frac{\psi^2}{2!} + \frac{\psi^3}{3!} + \dots \quad (72)$$

Como  $(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)^2 = -1$  segue usando as bem conhecidas expressões em termos de séries de potências para as funções seno e co-seno que

$$R = \cos \theta + \sin \theta \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = \exp(\theta \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1). \quad (73)$$

Voltando agora à eq.(67), vamos utilizar esta última expressão para  $R$  para verificar que de fato aquela operação trata-se de uma rotação. Temos então

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= (\cos \theta + \sin \theta \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1)(v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2)(\cos \theta - \sin \theta \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) \\ &= (\cos \theta + \sin \theta \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1)[(v_1 \cos \theta - v_2 \sin \theta) \mathbf{e}_1 \\ &\quad + (v_2 \cos \theta + v_1 \sin \theta) \mathbf{e}_2] \\ &= [v_1(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - v_2(2 \sin \theta \cos \theta)] \mathbf{e}_1 \\ &\quad + [v_2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + v_1(2 \sin \theta \cos \theta)] \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (74)$$

Usando as conhecidas relações trigonométricas  $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$  e  $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$  segue que

$$\mathbf{v}' = (v_1 \cos 2\theta - v_2 \sin 2\theta) \mathbf{e}_1 + (v_2 \cos 2\theta + v_1 \sin 2\theta) \mathbf{e}_2, \quad (75)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} v'_1 &= v_1 \cos 2\theta - v_2 \sin 2\theta, \\ v'_2 &= v_2 \cos 2\theta + v_1 \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (76)$$

Vemos portanto que a operação  $\mathbf{v} \rightarrow R\mathbf{v}R^{-1}$  com  $R$  dado pela eq.(73) descreve uma *rotação por um ângulo*  $2\theta$ . Uma rotação por um ângulo  $\phi$  é portanto descrita por  $R$  dado por

$$R = \exp\left(\frac{\phi}{2} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1\right) = \cos \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1. \quad (77)$$

Algumas observações cabem agora. Primeiro, o ângulo de rotação  $\phi$  na eq.(77) está dado no sentido *anti-horário*, o que pode ser facilmente verificado. Isto pode ser visto como consequência de termos escolhido na eq.(71) o bivector  $\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1$ . Evidentemente poderíamos ter escolhido no lugar deste o bivector  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ . Estes bivectores, como já discutimos, descrevem fragmentos de plano com a mesma área porém com *orientações opostas*. Se tivéssemos então escolhido o bivector  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$  o resultado seria que  $R = \exp((\phi/2) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)$  descreveria uma rotação por um ângulo  $\phi$  medido no sentido *horário*. A arbitrariedade na escolha do sentido em que medimos o ângulo é portanto um reflexo da arbitrariedade na escolha dos bivectores  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$  ou  $\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ .

Outra observação, relacionada com a acima, é que *tanto*  $R$  *quanto*  $-R$  descrevem a *mesma* rotação. De fato,

$$R\mathbf{v}R^{-1} = (-R)\mathbf{v}(-R)^{-1}. \quad (78)$$

A interpretação para este fato é simples. De fato, se  $\mathbf{v}'$  é o vetor obtido por uma rotação do vetor  $\mathbf{v}$  por um ângulo  $\phi$  no sentido anti-horário, então uma rotação por um ângulo  $2\pi - \phi$  no sentido horário produz o mesmo resultado, como ilustra a Fig.7.

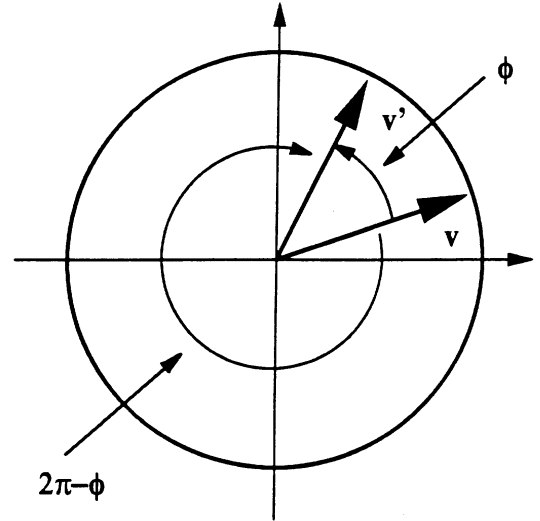


Figura 7. Duas maneiras possíveis de obter o vetor  $\mathbf{v}'$  através de uma rotação do vetor  $\mathbf{v}$ .

Enquanto a primeira rotação é descrita por  $R_1 = \exp((\phi/2) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1)$ , a outra rotação, é descrita (segundo a discussão acima) por  $R_2 = \exp(((2\pi - \phi)/2) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)$ . Agora podemos notar que

$$\begin{aligned} R_2 &= \exp((2\pi - \phi)/2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) \\ &= \exp(\pi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) \exp(-(\phi/2) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) \\ &= (-1) \exp((\phi/2) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) = -R_1, \end{aligned} \quad (79)$$

onde usamos  $\exp(\pi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) = -1$ . Portanto o fato que rotações por um ângulo  $\phi$  num sentido e por um ângulo  $2\pi - \phi$  no sentido oposto serem equivalentes tem como consequência neste formalismo que  $R$  e  $-R$  descrevem a mesma rotação.

## IV A álgebra geométrica do plano pseudo-euclidiano

Vamos agora considerar a álgebra geométrica do plano pseudo-euclidiano de uma maneira completamente análoga ao caso euclidiano. Primeiro, vamos definir o produto geométrico, que nesse caso deve satisfazer

$$(v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2)(v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2) = (v_1)^2 - (v_2)^2. \quad (80)$$

A solução aqui é dada por

$$(\mathbf{e}_1)^2 = 1, \quad (81)$$

$$(\mathbf{e}_2)^2 = -1, \quad (82)$$

$$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 = 0, \quad (83)$$

Assim como as eqs.(33-35) para o caso euclidiano, *estas* relações definem o produto geométrico da álgebra

geométrica do plano pseudo-euclidiano. Em termos do produto geométrico temos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^2 > 0 &\iff \text{vetor tipo-tempo,} \\ \mathbf{v}^2 = 0 &\iff \text{vetor tipo-luz,} \\ \mathbf{v}^2 < 0 &\iff \text{vetor tipo-espaço.} \end{aligned} \quad (84)$$

Para o caso do produto geométrico de vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$  encontramos que

$$\mathbf{v}\mathbf{u} = (v_1 u_1 - v_2 u_2) + (v_1 u_2 - v_2 u_1)\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2, \quad (85)$$

que escrevemos como a eq.(42), ou seja,

$$\mathbf{v}\mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}, \quad (86)$$

onde

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}\mathbf{u} + \mathbf{u}\mathbf{v}}{2}, \quad (87)$$

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = -\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}\mathbf{u} - \mathbf{u}\mathbf{v}}{2}. \quad (88)$$

Assim como no caso euclidiano, interpretamos o objeto  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$  como um bivector (ou 2-vetor). Esta interpretação é *independente* das propriedades métricas do espaço. Porém, quando levamos em conta estas propriedades, encontramos as diferenças com relação ao caso euclidiano. Por exemplo, agora temos

$$(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)^2 = 1, \quad (89)$$

o que pode ser facilmente verificado usando as eqs.(81-83), ao contrário do caso euclidiano onde  $(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)^2 = -1$ .

Toda a estrutura multivetorial é independente das propriedades métricas e portanto permanecem *inalteradas* quer consideramos os casos euclidiano ou pseudo-euclidiano. Aqui também devemos considerar o espaço vetorial definido pela soma direta dos espaços dos escalares, vetores e bivectores. Entretanto, para lembrarmos a natureza pseudo-euclidiana, denotamos o espaço dos 1-vetores por  $\mathbb{R}^{1,1}$ , numa óbvia alusão ao fato de termos 1 sinal positivo e 1 negativo. Devemos considerar então o espaço vetorial  $\bigwedge(\mathbb{R}^{1,1})$  dado por

$$\bigwedge \mathbb{R}^{1,1} = \bigwedge^0(\mathbb{R}^{1,1}) \oplus \bigwedge^1(\mathbb{R}^{1,1}) \oplus \bigwedge^2(\mathbb{R}^{1,1}), \quad (90)$$

onde  $\bigwedge^0(\mathbb{R}^{1,1}) = \mathbb{R}$  e  $\bigwedge^1(\mathbb{R}^{1,1}) = \mathbb{R}^{1,1}$ . A álgebra geométrica do plano pseudo-euclidiano será denotada por  $\mathcal{C}\ell_{1,1}$ .

Os operadores de projeção definidos pela eq.(45) são definidos da mesma maneira aqui, assim como as operações involução graduada, reversão e conjugação – resp, eqs.(46), (47) e (49). Também definimos  $|\psi|^2$  como na eq.(52) e se vale a eq.(53) definimos  $\psi^{-1}$  como na eq.(54).

A eq.(55) continua válida no caso pseudo-euclidiano mas deste ponto em diante aparecem *diferenças fundamentais* com relação ao caso euclidiano. Não é difícil vermos que no caso pseudo-euclidiano temos  $|\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}|^2 \leq$

0 – ao contrário do caso euclidiano onde  $|\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}|^2 \geq 0$ . De fato, todo bivector  $B$  é da forma  $b\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$  e usando a definição de  $|B|^2$  temos

$$|B|^2 = b^2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = -b^2 \leq 0. \quad (91)$$

Uma vez que  $|\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}|^2 \leq 0$  a eq.(56) não é mais válida e em seu lugar temos agora

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \geq |\mathbf{v}|^2 |\mathbf{u}|^2. \quad (92)$$

Se  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$  são vetores tipo-tempo então podemos concluir que

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \geq |\mathbf{v}| |\mathbf{u}|. \quad (93)$$

A inversão da desigualdade reflete-se também na desigualdade triangular. Repetindo o mesmo raciocínio na eq.(60) mas usando agora a eq.(92) no lugar da eq.(56) encontramos que

$$|\mathbf{v} + \mathbf{u}|^2 \geq (|\mathbf{v}| + |\mathbf{u}|)^2. \quad (94)$$

Portanto, se  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$  são vetores tipo-tempo temos

$$|\mathbf{v} + \mathbf{u}| \geq |\mathbf{v}| + |\mathbf{u}|. \quad (95)$$

Esta é a desigualdade triangular envolvendo vetores tipo-tempo em um espaço pseudo-euclidiano. É importante notarmos a diferença no sinal da desigualdade para o caso euclidiano (eq.61).

Embora para os vetores tipo-tempo tenhamos  $|\mathbf{v}|^2 \geq 0$  como no caso euclidiano, isso não implica que para esta classe de vetores a desigualdade triangular “euclidiana” seja satisfeita! Ao contrário, os vetores tipo-tempo satisfazem a desigualdade triangular “pseudo-euclidiana” expressa pela eq.(95). Isso trata-se de um paradoxo? Não, de jeito algum! Porém, na TR uma das consequências imediatas da eq.(95) é comumente chamada “paradoxo dos gêmeos”, como veremos adiante.

Prosseguindo de maneira análoga ao caso euclidiano, vamos agora definir o ângulo entre vetores. Aqui também há uma importante diferença com relação ao caso euclidiano expresso pelas eqs.(58) e (59). Já discutimos na sec.2 que no caso pseudo-euclidiano devemos considerar o “ângulo hiperbólico”. Logo, ao contrário das eqs.(58) e (59), definimos agora para vetores tipo-tempo

$$\cosh \theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{v}| |\mathbf{u}|}, \quad (96)$$

e

$$\sinh \theta = \frac{|\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}|}{|\mathbf{v}| |\mathbf{u}|}, \quad (97)$$

onde nesse caso devemos tomar

$$|\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}| = \sqrt{-|\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}|^2} \quad (98)$$

uma vez que  $|\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}|^2 < 0$ . Para  $\theta$  assim definido temos  $0 \leq \theta < \infty$ .

Como no caso euclidiano, uma reflexão é descrita pela eq.(64). A diferença agora é que temos dois casos

a considerar:  $\mathbf{u}^2 = 1$  ou  $\mathbf{u}^2 = -1$ . No primeiro caso  $\mathbf{u}^{-1} = \mathbf{u}$  e a eq.(64) pode ser escrita como  $\mathbf{v}' = -\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{u}$ ; já no segundo caso temos  $\mathbf{u}^{-1} = -\mathbf{u}$  e a eq.(64) e portanto  $\mathbf{v}' = \mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{u}$ .

No primeiro caso o vetor  $\mathbf{u}$  é tipo-tempo e a reflexão se faz ao longo de uma reta (hiper-plano no caso geral) tipo-espaço. Se  $\mathbf{u}^2 = 1$  podemos escrever devido à eq.(27)

$$\mathbf{u} = \cosh \alpha \mathbf{e}_1 + \sinh \alpha \mathbf{e}_2. \quad (99)$$

O cálculo de  $\mathbf{v}' = -\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{u}$  não apresenta dificuldades e o resultado é

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= (v_2 \sinh 2\alpha - v_1 \cosh 2\alpha) \mathbf{e}_1 \\ &+ (v_2 \cosh 2\alpha - v_1 \sinh 2\alpha) \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (100)$$

Para chegar a este resultado usamos  $\cosh 2\alpha = \cosh^2 \alpha + \sinh^2 \alpha$  e  $\sinh 2\alpha = 2 \sinh \alpha \cosh \alpha$ . É interessante notarmos que se  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1$  ( $\alpha = 0$ ) temos

$$\mathbf{v}' = -v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2, \quad (101)$$

ou seja, há uma inversão na parte temporal de  $\mathbf{v}$ .

Por outro lado, se  $\mathbf{u}$  é tipo-espaço a reflexão se dá através de uma reta tipo-tempo. Se  $\mathbf{u}^2 = -1$  podemos escrever

$$\mathbf{u} = \sinh \alpha \mathbf{e}_1 + \cosh \alpha \mathbf{e}_2. \quad (102)$$

O cálculo de  $\mathbf{v}' = \mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{u}$  resulta em

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= (v_1 \cosh 2\alpha - v_2 \sinh 2\alpha) \mathbf{e}_1 \\ &+ (v_1 \sinh 2\alpha - v_2 \cosh 2\alpha) \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (103)$$

Se  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2$  ( $\alpha = 0$ ) temos uma inversão na parte espacial de  $\mathbf{v}$ , ou seja,

$$\mathbf{v}' = v_1 \mathbf{e}_1 - v_2 \mathbf{e}_2. \quad (104)$$

De maneira completamente análoga ao caso euclidiano, uma rotação no plano pseudo-euclidiano é descrita pela eq.(67), ou seja,

$$\mathbf{v}' = R\mathbf{v}R^{-1}, \quad (105)$$

onde  $R = \mathbf{u}_1\mathbf{u}_2$  com  $\mathbf{u}_1^2 = \mathbf{u}_2^2 = 1$ . Podemos expressar  $R$  de uma maneira mais conveniente como

$$R = \mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2, \quad (106)$$

onde agora podemos usar as eqs.(96) e (97) para escrever

$$R = \cosh \theta + \sinh \theta \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1. \quad (107)$$

O mesmo raciocínio que utilizamos no caso euclidiano (após a eq.70) para escrever a eq.(71) deve ser utilizado para escrevermos a eq.(107); ou seja, o bivector unitário em questão pode ser ou  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$  ou  $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$  e as duas possibilidades são levadas em conta assumindo  $-\infty < \theta < \infty$ .

Usando a definição da exponencial de um multivetor (eq.72) e o fato que nesse caso  $(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)^2 = 1$  segue que

$$R = \cosh \theta + \sinh \theta \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 = \exp(\theta \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1). \quad (108)$$

A eq.(105) resulta então em

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= (v_1 \cosh 2\theta + v_2 \sinh 2\theta) \mathbf{e}_1 \\ &+ (v_1 \sinh 2\theta + v_2 \cosh 2\theta) \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (109)$$

Logo a operação  $\mathbf{v} \mapsto R\mathbf{v}R^{-1}$  com  $R$  dado pela eq.(108) corresponde a uma rotação hiperbólica por um ângulo hiperbólico  $2\theta$ . Obviamente uma rotação hiperbólica por um ângulo hiperbólico  $\phi$  é descrita por

$$R = \exp\left(\frac{\phi}{2} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1\right) = \cosh \frac{\phi}{2} + \sinh \frac{\phi}{2} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1. \quad (110)$$

Como vemos, tanto no caso euclidiano como no pseudo-euclidiano, uma rotação é descrita por  $\mathbf{v} \mapsto R\mathbf{v}R^{-1}$  com  $R$  da forma  $R = \exp[(\phi/2)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1]$ . A diferença é que no caso euclidiano podemos escrever esta exponencial em termos das funções seno e co-seno como na eq.(73) enquanto no caso pseudo-euclidiano devemos usar as funções seno e co-seno hiperbólicos como na eq.(110) e isso deve-se ao fato que  $(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)^2 = -1$  em  $\mathcal{C}\ell_2$  e  $(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)^2 = 1$  em  $\mathcal{C}\ell_{1,1}$ . As observações que fizemos na seção anterior após a eq.(77) também valem aqui.

Para ilustrarmos uma rotação hiperbólica é conveniente considerarmos os vetores  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$  em separado. Usando a eq.(109) temos que uma rotação hiperbólica por um ângulo  $\phi$  resulta em

$$\mathbf{e}'_1 = R\mathbf{e}_1R^{-1} = \cosh \phi \mathbf{e}_1 + \sinh \phi \mathbf{e}_2 \quad (111)$$

e

$$\mathbf{e}'_2 = R\mathbf{e}_2R^{-1} = \sinh \phi \mathbf{e}_1 + \cosh \phi \mathbf{e}_2. \quad (112)$$

Já sabemos que em uma rotação hiperbólica enquanto a extremidade inicial de um vetor permanece fixa na origem a extremidade final deste vetor move-se ao longo de uma hipérbole. Só falta determinar a direção. Para isso vamos supor primeiro que  $\phi > 0$ .

É fácil vermos a partir das definições do seno e co-seno hiperbólicos que  $\cosh \phi \geq 1$  para  $-\infty < \phi < \infty$  e que  $\sinh \phi \geq 0$  para  $\phi \geq 0$  e  $\sinh \phi \leq 0$  para  $\phi \leq 0$ . Além disso temos sempre  $\cosh \phi \geq \sinh \phi$ , com a igualdade valendo apenas no limite  $\phi \rightarrow \infty$ . Posto isso, para  $\phi \geq 0$  vale  $\cosh \phi \geq 1$ ,  $\sinh \phi \geq 0$  e  $\cosh \phi \geq \sinh \phi$  e a rotação hiperbólica dos vetores  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$  resultando nos vetores  $\mathbf{e}'_1$  e  $\mathbf{e}'_2$  dados pelas eqs.(111) e (112) pode ser ilustrada como na Fig.8.

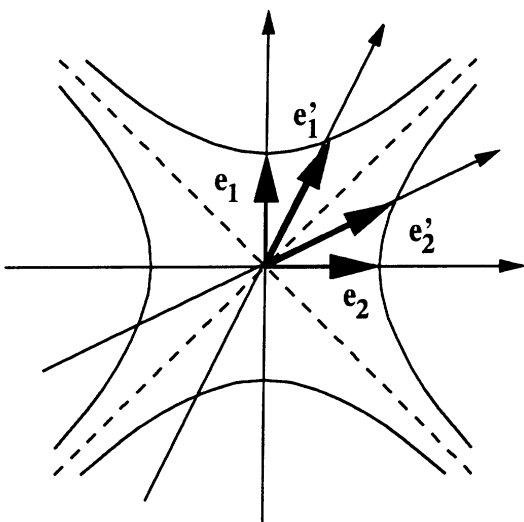


Figura 8. Uma mesma rotação hiperbólica agindo sobre os vetores tipo-tempo  $e_1$  e tipo espaço  $e_2$ .

Podemos notar que quanto maior  $\phi$  menor fica a diferença entre as funções co-seno hiperbólico e seno hiperbólico e os vetores  $e'_1$  e  $e'_2$  cada vez mais se aproximam de uma das assíntotas da hipérbole.

Por outro lado, se  $\phi \leq 0$  temos  $\cosh \phi \geq 1$ ,  $\sinh \phi \leq 0$  e  $\cosh \phi \geq |\sinh \phi| = -\sinh \phi$ . A rotação hiperbólica por um ângulo  $\phi \leq 0$  pode então ser ilustrada como na Fig.9.

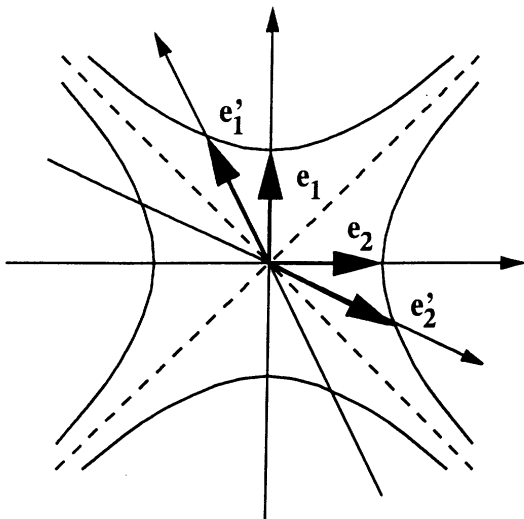


Figura 9. Uma mesma rotação hiperbólica agindo sobre os vetores tipo-tempo  $e_1$  e tipo espaço  $e_2$  mas no sentido oposto da figura anterior.

## V O espaço-tempo

Para entendermos o conceito de espaço-tempo (e outros relacionados) é necessário antes de mais nada estabelecermos claramente a diferença entre um espaço vetorial e um espaço afim.

É um erro comum dizermos que o “espaço físico” tridimensional é o espaço vetorial euclidiano  $\mathbb{R}^3$ . Na verdade, o “espaço físico” tridimensional é um *espaço afim* euclidiano  $\mathbb{E}^3$ . Intuitivamente isso significa que em um espaço afim nenhum ponto tem preferência sobre outro. Qualquer ponto pode ser tomado, por exemplo, como a *origem* de um sistema de referência. As *translações* de um ponto são então determinadas pelos vetores de um espaço vetorial definido *neste ponto*. Em outras palavras, podemos pensar em um espaço afim como sendo um espaço de pontos onde em cada ponto deste espaço está definido um espaço vetorial. No caso do espaço afim euclidiano  $\mathbb{E}^3$  em cada um de seus pontos está definido um espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  cujos elementos (vetores) determinam as translações dos pontos de  $\mathbb{E}^3$ .

Precisamos, é claro, tornar esta idéia um pouco mais precisa do ponto de vista matemático. Vamos considerar então um espaço vetorial  $V$  sobre os reais  $\mathbb{R}$ . Um conjunto arbitrário  $E$  (cujos elementos denominaremos pontos) é dito um *espaço afim* se existe uma aplicação  $\zeta : E \times E \rightarrow V$  que a cada par de pontos  $P, Q \in E$  faz corresponder um vetor em  $V$  que denotaremos como  $\overrightarrow{PQ}$  e tal que sejam satisfeitos os seguintes axiomas:

- (i) Para quaisquer  $P \in E$  e  $\mathbf{v} \in V$  existe *um e apenas um* ponto  $Q \in E$  para o qual  $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v}$ ;
- (ii) Para quaisquer pontos  $P, Q, R \in E$  verifica-se a relação  $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ .

Como consequências do axioma (ii) podemos ver facilmente que  $\overrightarrow{PP} = 0$  (vetor nulo) e que  $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ . Dizemos que o vetor  $\overrightarrow{PQ}$  tem origem  $P$  e extremidade  $Q$ . A dimensão do espaço afim é definida como a dimensão do espaço vetorial associado a ele. Um espaço afim de dimensão um é uma reta; um espaço afim de dimensão dois é um plano, etc. Fixado um ponto  $P \in E$  o conjunto de todos os vetores com origem em  $P$  é justamente o espaço vetorial  $V$ . Em símbolos, definindo  $T_P(E) = \{\overrightarrow{PQ} | Q \in E\}$  temos  $T_P(E) \simeq V$  para cada  $P \in E$  (onde  $\simeq$  denota isomorfismo).

É bem conhecido das lições básicas de álgebra linear que qualquer espaço vetorial  $V$  de dimensão  $n$  finita sobre  $\mathbb{R}$  é isomorfo ao espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$ , que<sup>5</sup> por sua vez consiste no espaço vetorial das  $n$ -uplas  $(x_1, \dots, x_n)$ . Podemos portanto limitar nossa discussão à consideração do espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$ .

Seja agora um espaço afim  $E$  ligado ao espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$ . Denomina-se *referencial afim* de  $E$  o par  $(O, \mathcal{B})$  composto por um ponto  $O$  de  $E$  (que denominamos *origem* do referencial) e por uma base  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$ . Quando  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^n$  nos referimos a este referencial afim como um referencial canônico. As *coordenadas* de um ponto  $P \in E$  num

<sup>5</sup>É oportuno lembrar que não estamos considerando por enquanto nenhuma estrutura métrica adicional sobre o espaço vetorial.

referencial  $(O, \mathcal{B})$  são definidas como sendo as componentes do vetor  $\overrightarrow{OP}$  na base  $\mathcal{B}$ , ou seja, se

$$\overrightarrow{OP} = x_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n \quad (113)$$

então as quantidades  $(x_1, \dots, x_n)$  são as coordenadas afins do ponto  $P$  no referencial  $(O, \mathcal{B})$ . Obviamente as coordenadas afins da origem  $O$  neste referencial são  $(0, \dots, 0)$ . No caso de dois referenciais afins  $(O, \mathcal{B})$  e  $(O', \mathcal{B}')$ , as coordenadas afins de um ponto  $P$  no referencial  $(O, \mathcal{B})$  consistem nas coordenadas do vetor  $\overrightarrow{OP}$  na base  $\mathcal{B}$  enquanto as coordenadas afins deste mesmo ponto  $P$  no referencial  $(O', \mathcal{B}')$  consistem nas coordenadas do vetor  $\overrightarrow{O'P}$  na base  $\mathcal{B}'$ .

Podemos agora discutir o que entendemos por espaço-tempo<sup>6</sup>. O conceito de espaço-tempo dentro da TR foi introduzido por Hermann Minkowski em 1908 e por isso é comum usarmos a denominação espaço-tempo de Minkowski.

Primeiro vamos considerar o espaço vetorial quadridimensional  $\mathbb{R}^4$ . Seja  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  a sua base canônica. Um vetor arbitrário deste espaço é portanto da forma

$$\mathbf{v} = v_0 \mathbf{e}_0 + v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3. \quad (114)$$

Neste espaço definimos a seguinte métrica<sup>7</sup>:

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (v_0)^2 - (v_1)^2 - (v_2)^2 - (v_3)^2. \quad (115)$$

O espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  equipado com esta métrica  $g$  denomina-se espaço vetorial de Minkowski e o denotamos por  $\mathbb{R}^{1,3}$ .

A denominação adotada no caso do plano pseudo-euclidiano com relação aos tipos de vetores foi herdada do presente caso, ou seja, classificamos os vetores em tipo-tempo, tipo-luz ou tipo-espaço conforme:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0 &\iff \text{vetor tipo-tempo} \\ g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 &\iff \text{vetor tipo-luz} \\ g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) < 0 &\iff \text{vetor tipo-espaço} \end{aligned} \quad (116)$$

A condição  $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$  define o que chamamos *cone de luz*. Mais precisamente temos dois cones, um dado pela equação  $v_0 = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2}$  e outro pela equação  $v_0 = -\sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2}$ . O primeiro cone corresponde ao que chamaremos cone de luz do *futuro* e o segundo ao cone de luz do *passado*. No caso do plano pseudo-euclidiano estes cones correspondem às assintotas das hipérbolas.

Já a condição  $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = r^2$  (onde  $r$  é constante) define o que chamamos um *hiperbolóide*. O mesmo vale,

<sup>6</sup>Não custa nada lembrar o conteúdo da primeira nota de rodapé, ou seja: estamos considerando aqui apenas a Teoria da Relatividade Restrita e não a Teoria da Relatividade Geral. Dentro do domínio da TRG devemos considerar um conceito mais geral que o de espaço afim que é o de variedade. Não discutiremos aqui o conceito de variedade pois este envolve questões “técnicas” que estão completamente fora do escopo deste artigo.

<sup>7</sup>A escolha entre  $(+, -, -, -)$  e  $(-, +, +, +)$  é arbitrária.

é claro, para a condição  $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = -r^2$ . No caso do plano pseudo-euclidiano esses hiperbolóides correspondem evidentemente às hipérbolas.

A região tal que  $v_0 > \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2}$  é chamada *futuro* enquanto a região tal que  $v_0 < -\sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2}$  é chamada *passado*. Desse modo, um vetor tipo-tempo pode ainda ser classificado como apontando para o futuro ou para o passado. As regiões tais que  $(v_0)^2 < (v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2$  são o *presente*. Evidentemente não temos como ilustrar isso no caso quadridimensional; no caso bidimensional a situação análoga é ilustrada na Fig.10.

O espaço afim  $\mathbb{E}^{1,3}$  ligado ao espaço vetorial de Minkowski  $\mathbb{R}^{1,3}$  é o que denominamos espaço-tempo de Minkowski. Os pontos em  $\mathbb{E}^{1,3}$  são chamados *eventos*. Em termos do referencial  $(O, \mathcal{B})$  as coordenadas de um evento são dadas por  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$ , onde

$$\overrightarrow{OP} = x_0 \mathbf{e}_0 + x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3. \quad (117)$$

A coordenada  $x_0$  é a coordenada temporal e as demais as coordenadas ditas espaciais. Mais especificamente, temos

$$x_0 = ct, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad (118)$$

onde  $t$  é o instante de tempo do evento no referencial considerado,  $c$  é uma constante interpretada como a velocidade da luz e  $(x, y, z)$  as coordenadas espaciais cartesianas do evento neste referencial. O intervalo entre dois eventos  $P$  e  $Q$  é definido como sendo a distância quadridimensional entre estes objetos, ou seja, por

$$\begin{aligned} g(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}) &= c^2(t_P - t_Q)^2 - (x_P - x_Q)^2 \\ &\quad - (y_P - y_Q)^2 - (z_P - z_Q)^2. \end{aligned} \quad (119)$$

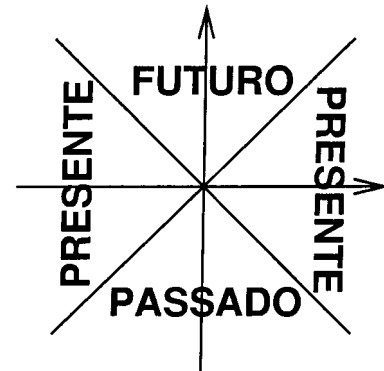


Figura 10. Regiões do espaço-tempo.

Uma curva no espaço-tempo é classificada de acordo com a categoria do vetor tangente à esta curva. Vamos supor que esta curva é parametrizada por  $\alpha$ , ou seja, as coordenadas da curva são funções de  $\alpha$ , nesse caso  $(ct(\alpha), x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ . O vetor tangente à esta curva no ponto correspondendo a  $\alpha = \alpha_0$  é

$$\mathbf{v} = \left( c \frac{dt}{d\alpha}, \frac{dx}{d\alpha}, \frac{dy}{d\alpha}, \frac{dz}{d\alpha} \right), \quad (120)$$

onde as derivadas são calculadas em  $\alpha = \alpha_0$ . Nesse caso

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \left( c \frac{dt}{d\alpha} \right)^2 - \left( \frac{dx}{d\alpha} \right)^2 - \left( \frac{dy}{d\alpha} \right)^2 - \left( \frac{dz}{d\alpha} \right)^2. \quad (121)$$

A curva é dita tipo-tempo, tipo-luz ou tipo-espaço conforme o vetor tangente  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{1,3}$  seja tipo-tempo, tipo-luz ou tipo-espaço, respectivamente.

Uma partícula com massa (não-nula) é definida por uma curva tipo-tempo. Esta curva é chamada *linha de universo* ou *história* da partícula. A luz é definida por uma curva tipo-luz.

Sejam  $A$  e  $B$  os pontos inicial e final de uma curva tipo-tempo, correspondendo aos valores do parâmetro  $\alpha = \alpha_0$  e  $\alpha = \alpha_1$ , respectivamente. Se  $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \neq 0$  (que é o caso para uma curva tipo-tempo) podemos definir o *comprimento* desta curva como

$$L = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \sqrt{|g(\mathbf{v}, \mathbf{v})|} d\alpha. \quad (122)$$

O ponto importante aqui é que podemos *utilizar o comprimento da curva como parâmetro da curva*. Para isso basta deixarmos nesta última equação um dos extremos de integração livres, por exemplo o correspondendo ao ponto final. A quantidade  $\tau$  dada por

$$\tau = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \sqrt{|g(\mathbf{v}, \mathbf{v})|} d\alpha' \quad (123)$$

é uma função  $\tau = \tau(\alpha)$  que pode ser invertida para escrevermos  $\alpha = \alpha(\tau)$ . Basta utilizarmos  $\alpha = \alpha(\tau)$  para expressarmos a curva antes parametrizada por  $\alpha$  agora em termos do parâmetro  $\tau$ .

O parâmetro  $\tau$  é o que chamamos *tempo próprio*. É fácil vermos que se tomarmos o tempo próprio como parâmetro da curva então o vetor tangente a esta curva é unitário. De fato, se  $\tau$  é o parâmetro da curva, o vetor tangente  $\mathbf{V}$  é

$$\mathbf{V} = \left( c \frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right). \quad (124)$$

Por outro lado, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \left( c \frac{dt}{d\alpha} \frac{d\alpha}{d\tau}, \frac{dx}{d\alpha} \frac{d\alpha}{d\tau}, \frac{dy}{d\alpha} \frac{d\alpha}{d\tau}, \frac{dz}{d\alpha} \frac{d\alpha}{d\tau} \right) \\ &= \left( c \frac{dt}{d\alpha}, \frac{dx}{d\alpha}, \frac{dy}{d\alpha}, \frac{dz}{d\alpha} \right) \frac{d\alpha}{d\tau}, \end{aligned} \quad (125)$$

ou seja,

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} \frac{d\alpha}{d\tau}. \quad (126)$$

Por outro lado, da eq.(123) segue que

$$\frac{d\tau}{d\alpha} = \sqrt{|g(\mathbf{v}, \mathbf{v})|}. \quad (127)$$

Juntando as duas últimas equações segue que

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{|g(\mathbf{v}, \mathbf{v})|}}, \quad (128)$$

ou seja,  $\mathbf{V}$  é unitário:

$$g(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = 1. \quad (129)$$

Portanto para uma curva tipo-tempo parametrizada pelo tempo próprio o vetor tangente em cada ponto desta curva é unitário.

Um *observador* é definido como uma curva tipo-tempo parametrizada pelo tempo próprio e apontando para o futuro. Do ponto de vista matemático, “observador” e “linha de universo de uma partícula” são a mesma coisa. Se esta curva for uma reta dizemos que o observador é inercial; no caso de uma partícula dizemos que ela está em movimento uniforme. Uma vez que uma reta pode ser definida por um vetor, podemos definir um observador inercial em termos de um vetor tipo-tempo unitário apontando para o futuro.

Dado um observador, este naturalmente separa o espaço-tempo em “espaço” e “tempo”. Para isso utiliza-se a decomposição ortogonal do espaço vetorial de Minkowski em  $\mathbb{R}^{1,3} = T \oplus E$ , onde  $T = \text{span} \mathbf{V}$  denota o sub-espaço vetorial gerado pelo vetor tipo-tempo  $\mathbf{V}$  e  $E$  o sub-espaço vetorial gerado pelos vetores ortogonais a  $\mathbf{V}$  (que podemos chamar de espaço de repouso). Um outro observador fará também a separação do espaço-tempo em “espaço” e “tempo” mas de maneira distinta do primeiro observador se tivermos  $\mathbf{V}' \neq \mathbf{V}$ , onde  $\mathbf{V}'$  denota o vetor tipo-tempo unitário tangente à curva definindo este outro observador. No caso bidimensional podemos ilustrar esta situação como na Fig.11.

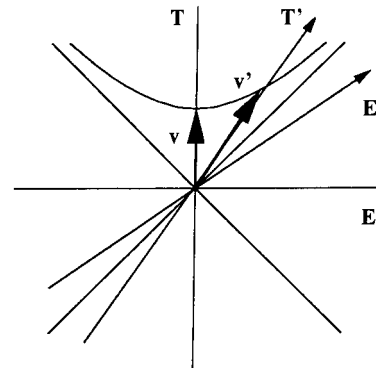


Figura 11. Tempo e espaço segundo dois observadores distintos.

Podemos analisar vários aspectos da TR simplesmente através de diagramas baseados na figura acima. A contração do comprimento na direção do movimento, por exemplo, pode ser explicada qualitativamente através de figuras como esta. Porém, como nossos objetivos neste artigo são outros, nos limitaremos a indicar como referência para discussões nesse sentido o livro de Rucker [5]. Neste livro o leitor interessado poderá se deliciar com análises qualitativas que certamente propiciarão uma melhor compreensão da TR. Entretanto, para completarmos um pouco esta seção e também motivar a leitura de [5], vamos discutir aquilo que chamamos “o paradoxo dos gêmeos”.

A fábula por detrás do paradoxo dos gêmeos pode ser contada da seguinte forma. Um belo dia um dos gêmeos entra em uma nave espacial e parte em uma viagem interestelar. Anos depois ao retornar verifica que seu irmão que ficou na Terra está mais velho que ele. Para facilitar a discussão e ilustração desta situação vamos imaginar as seguintes condições ideais: a nave parte de um ponto da Terra (evento S) com movimento uniforme chegando até um certo ponto (evento R) onde instantaneamente inverte seu curso voltando para a Terra novamente em movimento uniforme (com a chegada correspondendo ao evento C). A linha de universo do primeiro trecho da viagem é descrito pelo vetor  $\vec{SR}$  e o segundo trecho é descrito pelo vetor  $\vec{RC}$ . Esta situação está ilustrada na figura abaixo em termos da decomposição do espaço-tempo em  $T \oplus E$  medidos no referencial na Terra onde acontecem a saída e chegada da nave.

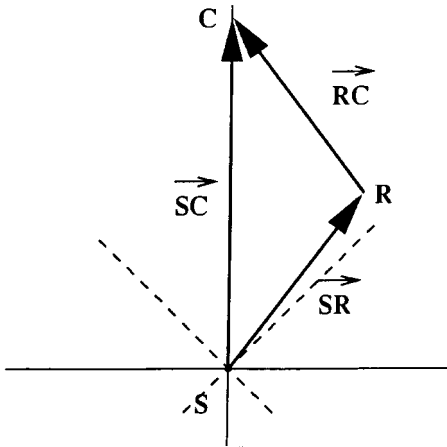


Figura 12. Representação no espaço-tempo da situação correspondente ao paradoxo dos gêmeos.

Estando as curvas parametrizadas em termos do tempo próprio, o comprimento destas curvas corresponde justamente ao intervalo de tempo decorrido no referencial onde o objeto que percorre esta curva se encontra em repouso. Portanto,  $|\vec{SR}|$  corresponde à duração do primeiro trecho da viagem no referencial da nave espacial e  $|\vec{RC}|$  corresponde à duração do segundo

trecho também no referencial da nave. Logo o irmão que viajou está  $|\vec{SR}| + |\vec{RC}|$  anos mais velho.

Já no referencial na Terra o intervalo de tempo entre a saída e a chegada da nave é dado por  $|\vec{SC}|$ , de modo que o irmão gêmeo que ficou na Terra está  $|\vec{SC}|$  anos mais velho. A relação entre as idades dos irmãos corresponde portanto à relação que existe entre as quantidades  $|\vec{SC}|$  e  $|\vec{SR}| + |\vec{RC}|$ . Evidentemente

$$\vec{SC} = \vec{SR} + \vec{RC}, \quad (130)$$

de modo que

$$|\vec{SC}| = |\vec{SR} + \vec{RC}|. \quad (131)$$

Agora, qual a relação entre  $|\vec{SR} + \vec{RC}|$  e  $|\vec{SR}| + |\vec{RC}|$ ? No caso de um espaço euclidiano esta relação é dada pela desigualdade triangular (61). Porém, o espaço-tempo é um espaço pseudo-euclidiano e portanto a desigualdade que vale é a expressa pela eq.(95). Logo, a relação que temos é

$$|\vec{SR} + \vec{RC}| \geq |\vec{SR}| + |\vec{RC}|. \quad (132)$$

Usando isto na eq.(131) segue que

$$|\vec{SC}| \geq |\vec{SR}| + |\vec{RC}|. \quad (133)$$

Esta equação pode ser lida da seguinte forma: o irmão que ficou na Terra (lado esquerdo da equação) está mais velho do que o irmão que fez a viagem interestelar (lado direito da equação).

## VI A álgebra geométrica do espaço-tempo

A álgebra geométrica do espaço-tempo é definida de maneira análoga aos casos já considerados. Primeiro, o produto geométrico é definido de modo que

$$(v_0 \mathbf{e}_0 + v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3)(v_0 \mathbf{e}_0 + v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3) = (v_0)^2 - (v_1)^2 - (v_2)^2 - (v_3)^2, \quad (134)$$

onde estamos considerando a métrica dada pela eq.(115). A solução para este problema, que define o produto geométrico, é dada por

$$(\mathbf{e}_0)^2 = 1, \quad (135)$$

$$(\mathbf{e}_i)^2 = -1, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (136)$$

$$\mathbf{e}_\mu \mathbf{e}_\nu + \mathbf{e}_\nu \mathbf{e}_\mu = 0, \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3). \quad (137)$$

Nas expressões acima temos um exemplo de uma convenção que iremos adotar: índices latinos assumindo os



valores 1, 2 e 3 e índices gregos assumindo os valores 0, 1, 2, e 3.

O produto geométrico de vetores pode ser escrito na forma

$$\mathbf{v}\mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}, \quad (138)$$

onde

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}\mathbf{u} + \mathbf{u}\mathbf{v}}{2}, \quad (139)$$

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = -\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}\mathbf{u} - \mathbf{u}\mathbf{v}}{2}. \quad (140)$$

Como nos casos anteriores, os objetos da forma  $\mathbf{v}\mathbf{u}$  são bivectores. Aqui, entretanto, como o espaço é quadridimensional, podemos definir outros objetos além de bivectores. A interpretação geométrica para isso é óbvia: além do plano bidimensional propriamente dito, em um espaço quadridimensional temos também hiper-planos tridimensionais e hiper-cubos quadridimensionais. Portanto, além de bivectores, podemos definir trivetores (ou 3-vetores) e quadrivetores (ou 4-vetores)<sup>8</sup>.

Para definir trivetores e quadrivetores vamos considerar o produto geométrico envolvendo um vetor (1-vetor) e um bivector. Primeiro, devemos notar que temos aqui quatro vetores linearmente independentes  $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  e seis bivectores linearmente independentes que resultam do produto geométrico de combinações destes vetores tomados dois a dois, ou seja, temos os bivectores  $\{\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_0\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_0\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\}$ . O produto geométrico envolvendo, por exemplo, o vetor  $\mathbf{e}_0$  e os bivectores  $\mathbf{e}_0\mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) resulta em vetor. Esse é o caso sempre que o índice do vetor é igual a um dos índices do bivector.

Logo, só podemos esperar por algo novo quando o índice do vetor for diferente dos índices do bivector. Por exemplo, o produto geométrico do vetor  $\mathbf{e}_0$  com o bivector  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$  resulta na quantidade  $\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ . Esta quantidade não é nem um escalar, nem um vetor e nem um bivector. Esta quantidade é o que denominamos um *trivector* ou *3-vetor*. Do ponto de vista geométrico podemos pensar que ela descreve um hiperplano orientado<sup>9</sup> no espaço quadridimensional. Este hiperplano é o gerado pelos vetores  $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$ . Como podemos ver facilmente, temos aqui apenas *quatro* trivetores linearmente independentes, a saber:  $\{\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_0\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\}$ . Qualquer outra combinação possível se reduz a estas usando a relação (137).

Continuando o raciocínio, podemos definir uma nova quantidade através do produto geométrico de um vetor e um trivector. Como só devemos esperar por algo novo quando o índice do vetor e os três índices do trivector forem todos diferentes, podemos considerar, por exemplo, o produto do vetor  $\mathbf{e}_0$  pelo trivector  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ . O resultado é a quantidade  $\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ , que denominamos

um *quadrivector* ou *4-vetor*. Todas as outras possibilidades, como por exemplo o produto de  $\mathbf{e}_1$  por  $\mathbf{e}_0\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ , resultam nesta mesma quantidade após um rearranjo apropriado usando a eq.(137). Portanto  $\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$  é o *único* quadrivector linearmente independente dentro da álgebra geométrica do espaço-tempo.

Com relação à nomenclatura, cabe comentar que muitas vezes um  $n$ -vetor em um espaço vetorial de dimensão  $n$  é também denominado um *pseudo-escalar* e que um  $(n-1)$ -vetor é também denominado um *pseudo-vetor*. Logo, no caso da álgebra geométrica do espaço-tempo um quadrivector pode ser também denominado um pseudo-escalar e um trivector um pseudo-vetor. Por detrás disto está o isomorfismo que existe entre os espaços vetoriais dos  $k$ -vetores e dos  $(n-k)$ -vetores. No caso que estamos considerando vemos isso explicitamente uma vez que os espaços vetoriais dos escalares e dos quadrivetores assim como os espaços vetoriais dos vetores e dos 3-vetores possuem o mesmo número de dimensões. Esta propriedade entretanto não se limita aos casos considerados; ela é geral.

Em geral usamos uma notação simplificadora para os  $k$ -vetores definidos acima. Esta notação está exemplificada abaixo:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{01} &= \mathbf{e}_0\mathbf{e}_1, \quad \text{etc,} \\ \mathbf{e}_{012} &= \mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \quad \text{etc,} \\ \mathbf{e}_{0123} &= \mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (141)$$

O pseudo-escalar  $\mathbf{e}_{0123}$  é tão importante que muitas vezes lhe reservamos uma notação particular através de

$$\mathbf{e}_5 = \mathbf{e}_{0123} = \mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3. \quad (142)$$

É importante observarmos que o pseudo-escalar satisfaz

$$(\mathbf{e}_5)^2 = -1 \quad (143)$$

e

$$\mathbf{e}_5\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{e}_5 = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{1,3}. \quad (144)$$

Estas propriedades<sup>10</sup> seguem facilmente do uso das eqs.(135-137). Esta última nos diz que o pseudo-escalar  $\mathbf{e}_5$  sempre anti-comuta com vetores. Consequentemente ele também anti-comuta com trivetores e comuta com bivectores (além, é claro, dos escalares ou outros pseudoescalares).

Denotaremos o espaço vetorial dos  $k$ -vetores por  $\bigwedge^k(\mathbb{R}^{1,3})$  e a soma direta destes por  $\bigwedge(\mathbb{R}^{1,3})$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \bigwedge(\mathbb{R}^{1,3}) &= \bigwedge^0(\mathbb{R}^{1,3}) \oplus \bigwedge^1(\mathbb{R}^{1,3}) \oplus \bigwedge^2(\mathbb{R}^{1,3}) \\ &\oplus \bigwedge^3(\mathbb{R}^{1,3}) \oplus \bigwedge^4(\mathbb{R}^{1,3}), \end{aligned} \quad (145)$$

<sup>8</sup>Esta denominação não deve ser confundida com uma às vezes adotada em alguns livros de Relatividade onde um vetor (ou um 1-vetor no jargão que estamos adotando) pertencente ao espaço vetorial de Minkowski é dito um 4-vetor ou quadrivector.

<sup>9</sup>Sobre a questão da orientação veja [1] e [3].

<sup>10</sup>É interessante comparar estas propriedades com as do caso da álgebra geométrica do espaço euclideano tridimensional discutido em [1].

onde usamos a convenção usual  $\bigwedge^0(\mathbb{R}^{1,3}) = \mathbb{R}$  e  $\bigwedge^1(\mathbb{R}^{1,3}) = \mathbb{R}^{1,3}$ . O espaço vetorial  $\bigwedge(\mathbb{R}^{1,3})$  equipado com o produto geométrico definido pelas eqs.(135-137) é o que denominamos *álgebra geométrica do espaço-tempo* e denotamos por  $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ .

Operações como as projeções  $\langle \cdot \rangle_k : \bigwedge(\mathbb{R}^{1,3}) \rightarrow \bigwedge^k(\mathbb{R}^{1,3})$  e as involuções denominadas reversão, involução graduada e conjugação – definidas no caso de  $\mathcal{C}\ell_2$  e  $\mathcal{C}\ell_{1,1}$  pelas eqs.(46-49) – continuam sendo definidas da mesma forma para  $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ .

A eq.(138) pode ser agora generalizada. Se  $\psi$  é um multivetor arbitrário então podemos escrever

$$\mathbf{v}\psi = \mathbf{v} \cdot \psi + \mathbf{v} \wedge \psi, \quad (146)$$

onde

$$\mathbf{v} \cdot \psi = \frac{\mathbf{v}\psi - \widehat{\psi}\mathbf{v}}{2}, \quad (147)$$

$$\mathbf{v} \wedge \psi = \frac{\mathbf{v}\psi + \widehat{\psi}\mathbf{v}}{2}. \quad (148)$$

Se  $\psi = \psi_k$  é um  $k$ -vetor temos  $\widehat{\psi}_k = (-1)^k \psi_k$  e estas equações ficam

$$\mathbf{v} \cdot \psi_k = \frac{\mathbf{v}\psi_k - (-1)^k \psi_k \mathbf{v}}{2}, \quad (149)$$

$$\mathbf{v} \wedge \psi_k = \frac{\mathbf{v}\psi_k + (-1)^k \psi_k \mathbf{v}}{2}. \quad (150)$$

Portanto a interpretação da decomposição (146) do produto geométrico em termos dos produtos  $\cdot$  e  $\wedge$  depende da graduação  $k$  de um  $k$ -vetor. Se  $\psi_k$  é um  $k$ -vetor então  $\mathbf{v} \wedge \psi_k$  é um  $(k+1)$ -vetor. Isso é consistente com nossa interpretação anterior. De fato, tomando como exemplo os vetores ortogonais  $\mathbf{e}_0$ ,  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$ , segue da definição acima que

$$\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2. \quad (151)$$

Do mesmo modo

$$\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3. \quad (152)$$

O fato do produto  $\wedge$  ser anticomutativo ou comutativo conforme a graduação do  $k$ -vetor deve-se ao fato deste produto para vetores ser anticomutativo. De fato, usando as propriedades de associatividade e a anticomutatividade segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{w}) &= (\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) \wedge \mathbf{w} = -(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} \\ &= -\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{u} \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (153)$$

o que mostra que o produto  $\wedge$  envolvendo vetor e bivetor é comutativo. Portanto, devemos levar em conta na definição deste produto a graduação do multivetor.

Não é difícil vermos que enquanto  $\mathbf{v} \wedge \psi_k$  é um  $(k+1)$ -vetor (para  $\psi_k$  um  $k$ -vetor),  $\mathbf{v} \cdot \psi_k$  é um  $(k-1)$ -vetor. O produto  $\cdot$  não é portanto um produto escalar.

A interpretação do produto  $\cdot$  como um produto escalar só é possível para o caso particular envolvendo dois vetores, ou seja, quando temos  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ . Para os demais casos devemos nos referir a esse produto como *contração* [1].

Além da eq.(146) podemos generalizar a eq.(138) como

$$\psi \mathbf{v} = \psi \cdot \mathbf{v} + \psi \wedge \mathbf{v}, \quad (154)$$

onde

$$\psi \cdot \mathbf{v} = \frac{\psi \mathbf{v} - \widehat{\psi} \mathbf{v}}{2}, \quad (155)$$

$$\psi \wedge \mathbf{v} = \frac{\psi \mathbf{v} + \widehat{\psi} \mathbf{v}}{2}. \quad (156)$$

Quando  $\psi = \psi_k$  é um  $k$ -vetor temos

$$\psi_k \cdot \mathbf{v} = \frac{\psi_k \mathbf{v} - (-1)^k \mathbf{v} \psi_k}{2}, \quad (157)$$

$$\psi_k \wedge \mathbf{v} = \frac{\psi_k \mathbf{v} + (-1)^k \mathbf{v} \psi_k}{2}. \quad (158)$$

Como podemos ver pelas definições acima, temos as seguintes propriedades:

$$\mathbf{v} \cdot \psi_k = -(-1)^k \psi_k \cdot \mathbf{v}, \quad (159)$$

$$\mathbf{v} \wedge \psi_k = (-1)^k \psi_k \wedge \mathbf{v}. \quad (160)$$

Já o produto geométrico  $\psi_k \phi_l$  para  $k > 1$  e  $l > 1$  não pode ser decomposto na forma (146) ou (154). É possível mostrar que em geral o resultado do produto geométrico  $\psi_k \phi_l$  pode ser escrito na forma [1]

$$\begin{aligned} \psi_k \phi_l &= \langle \psi_k \phi_l \rangle_{|k-l|} + \langle \psi_k \phi_l \rangle_{|k-l|+2} \\ &+ \cdots + \langle \psi_k \phi_l \rangle_{k+l}. \end{aligned} \quad (161)$$

Evidentemente podemos generalizar a definição dos produtos  $\cdot$  e  $\wedge$  através de

$$\psi_k \cdot \phi_l = \langle \psi_k \phi_l \rangle_{|k-l|}, \quad (162)$$

$$\psi_k \wedge \phi_l = \langle \psi_k \phi_l \rangle_{k+l}, \quad (163)$$

mas mesmo assim o produto  $\psi_k \phi_l$  não pode ser escrito na forma (146) ou (154) devido à presença de termos adicionais na eq.(161). Apenas quando um dos elementos for um vetor (ou  $k = 1$  ou  $l = 1$ ) o produto geométrico pode ser escrito na forma (146) ou (154).

Reflexões e rotações são descritas em  $\mathcal{C}\ell_{1,3}$  da mesma forma que no caso das álgebras dos planos euclídeo e pseudo-euclídeo. Entretanto, com relação às rotações, temos agora uma estrutura muito mais rica que devemos olhar com detalhes.

Vimos que tanto em  $\mathcal{C}\ell_2$  como em  $\mathcal{C}\ell_{1,1}$  uma rotação é descrita pela operação  $\mathbf{v} \mapsto R\mathbf{v}R^{-1}$  com  $R$  da forma  $R = \exp B/2$ , onde  $B$  é um bivetor. Este bivetor  $B$  é  $B = \phi \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1$  e a rotação se dá no plano dos vetores  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$ . No caso euclídeo  $(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1)^2 = -1$  e temos uma rotação propriamente dita; já no caso pseudo-euclídeo  $(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1)^2 = 1$  e a rotação é hiperbólica.

Em  $\mathcal{Cl}_{1,3}$  o espaço  $\bigwedge^2(\mathbb{R}^{1,3})$  dos bivectores tem dimensão seis e podemos ter tanto bivectores satisfazendo  $B^2 < 0$  como  $B^2 > 0$  (e até mesmo  $B^2 = 0$ ). Vamos considerar os bivectores tais que  $B^2 = -1$ ; por exemplo:  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$  e  $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$  (assim como combinações line-

ares convenientes destes). Como no caso do plano euclidiano, *estes bivectores geram rotações no plano por eles definido*. Como exemplo, vamos tomar o bivector  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$  e considerar a operação  $\mathbf{v} \mapsto R\mathbf{v}R^{-1}$  com  $R = \exp((\phi/2)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3)$ . Podemos então verificar que

$$\exp\left(\frac{\phi}{2}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\right)\mathbf{e}_0\exp\left(-\frac{\phi}{2}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\right) = \mathbf{e}_0, \tag{164}$$

$$\exp\left(\frac{\phi}{2}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\right)\mathbf{e}_1\exp\left(-\frac{\phi}{2}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\right) = \cos\phi\mathbf{e}_1 + \sin\phi\mathbf{e}_3, \tag{165}$$

$$\exp\left(\frac{\phi}{2}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\right)\mathbf{e}_2\exp\left(-\frac{\phi}{2}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\right) = \mathbf{e}_2, \tag{166}$$

$$\exp\left(\frac{\phi}{2}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\right)\mathbf{e}_3\exp\left(-\frac{\phi}{2}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\right) = \cos\phi\mathbf{e}_3 - \sin\phi\mathbf{e}_1. \tag{167}$$

Estas equações mostram claramente que temos uma rotação no plano dos vetores  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_3$ .

Agora vamos olhar para os bivectores tais que  $B^2 = 1$ ; por exemplo:  $\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_0\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3$ , fora as combinações lineares convenientes destes. Como no caso do plano

pseudo-euclidiano, *estes bivectores geram rotações hiperbólicas no plano por eles definido*. Um exemplo é suficiente para vermos isso. Tomando o bivector  $\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3$  podemos verificar que

$$\exp\left(\frac{\phi}{2}\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3\right)\mathbf{e}_0\exp\left(-\frac{\phi}{2}\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3\right) = \cosh\phi\mathbf{e}_0 - \sinh\phi\mathbf{e}_3, \tag{168}$$

$$\exp\left(\frac{\phi}{2}\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3\right)\mathbf{e}_1\exp\left(-\frac{\phi}{2}\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3\right) = \mathbf{e}_1, \tag{169}$$

$$\exp\left(\frac{\phi}{2}\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3\right)\mathbf{e}_2\exp\left(-\frac{\phi}{2}\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3\right) = \mathbf{e}_2, \tag{170}$$

$$\exp\left(\frac{\phi}{2}\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3\right)\mathbf{e}_3\exp\left(-\frac{\phi}{2}\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3\right) = \cosh\phi\mathbf{e}_3 - \sinh\phi\mathbf{e}_0. \tag{171}$$

Está claro que temos aqui uma rotação hiperbólica no plano dos vetores  $\mathbf{e}_0$  e  $\mathbf{e}_3$ .

Resumindo, a operação  $\mathbf{v} \mapsto R\mathbf{v}R^{-1}$  com  $R = \exp(\phi/2)B$  descreve uma *rotação espacial* se  $B^2 = -1$  ou uma *rotação hiperbólica* se  $B^2 = 1$ . Para deixarmos um pouco mais clara essa distinção vamos usar daqui em diante a seguinte notação: ao invés de  $R$  escreveremos  $U$  no caso de uma rotação espacial e  $L$  no caso de uma rotação hiperbólica.

Finalmente, vamos considerar uma rotação genérica no espaço-tempo. É possível mostrar (o que omitiremos aqui – veja, por exemplo, [6]) que a rotação mais geral possível no espaço-tempo pode ser escrita como a composição de uma rotação espacial e uma rotação hiperbólica. Em símbolos, se  $\mathbf{v} \mapsto R\mathbf{v}R^{-1}$  é uma rotação arbitrária do vetor  $\mathbf{v}$  no espaço-tempo então podemos escrever (de maneira única!)  $R$  na forma

$$R = LU, \tag{172}$$

onde  $L$  descreve uma rotação hiperbólica e  $U$  uma

rotação espacial.

## VII A Teoria da Relatividade Restrita

Vamos começar discutindo alguns aspectos da cinemática relativística. Primeiro, vamos considerar um referencial  $(O, \mathcal{B})$ . Lembrando a eq.(117), podemos descrever um evento  $P$  através do vetor  $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$ ,

$$\mathbf{x} = x_0\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3, \tag{173}$$

onde  $x_0 = ct$ , etc. Podemos pensar que o vetor tipo-tempo  $\mathbf{e}_0$  define um observador inercial e as coordenadas  $\{x_\mu\}$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) são portanto as coordenadas do evento com relação a este observador neste referencial.

Uma vez que  $\mathbf{e}_0^2 = 1$  podemos escrever<sup>11</sup>

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}\mathbf{e}_0\mathbf{e}_0 = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_0)\mathbf{e}_0 + (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}_0)\mathbf{e}_0 = ct\mathbf{e}_0 + \vec{x}, \tag{174}$$

<sup>11</sup> Sobre a questão de notação: dada uma quantidade no espaço-tempo denotada por uma letra em negrito, a correspondente quantidade no espaço tridimensional será denotada pela mesma letra com uma flecha. Um exemplo do uso desta notação está na eq.(174).

onde

$$ct = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_0 \quad (175)$$

e

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}_0)\mathbf{e}_0 = (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}_0) \cdot \mathbf{e}_0 \\ &= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (176)$$

Portanto, as quantidades  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_0$  e  $(\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}_0) \cdot \mathbf{e}_0$  são respectivamente o tempo e a posição do evento no referencial em questão. Aqui a posição do evento refere-se à posição no espaço tridimensional de acordo com um observador inercial definido por  $\mathbf{e}_0$ . Com isso, se  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau)$  é a linha de universo de uma partícula, no espaço tridimensional com relação ao observador  $\mathbf{e}_0$  esta partícula percorre uma trajetória  $\vec{x} = \vec{x}(t)$  determinada substituindo em  $\vec{x} = \vec{x}(\tau) = (\mathbf{x}(\tau) \wedge \mathbf{e}_0) \cdot \mathbf{e}_0$  a expressão para  $\tau$  em termos de  $t$  que obtemos resolvendo  $ct = ct(\tau) = \mathbf{x}(\tau) \cdot \mathbf{e}_0$ .

Seja  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau)$  a linha de universo de uma partícula, onde  $\tau$  denota o tempo próprio. Definimos a sua *velocidade própria* como

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau}. \quad (177)$$

Temos então

$$\mathbf{v} = c \frac{dt}{d\tau} \mathbf{e}_0 + \frac{dx_1}{d\tau} \mathbf{e}_1 + \frac{dx_2}{d\tau} \mathbf{e}_2 + \frac{dx_3}{d\tau} \mathbf{e}_3. \quad (178)$$

Logo

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0 + (\mathbf{v} \wedge \mathbf{e}_0) \cdot \mathbf{e}_0 \\ &= c \frac{dt}{d\tau} \mathbf{e}_0 + \frac{d\vec{x}}{d\tau}. \end{aligned} \quad (179)$$

A quantidade  $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{e}_0) \cdot \mathbf{e}_0 = (\mathbf{v} \wedge \mathbf{e}_0)\mathbf{e}_0$ ,

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{e}_0) \cdot \mathbf{e}_0 &= \left( \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \wedge \mathbf{e}_0 \right) \cdot \mathbf{e}_0 = \frac{d\vec{x}}{d\tau} \\ &= \frac{dx_1}{d\tau} \mathbf{e}_1 + \frac{dx_2}{d\tau} \mathbf{e}_2 + \frac{dx_3}{d\tau} \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (180)$$

não é a velocidade  $\vec{v}$  associada com o movimento da partícula no espaço tridimensional. No espaço tridimensional a partícula percorre uma trajetória  $\vec{x} = \vec{x}(t)$  e a velocidade para esta partícula é

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}. \quad (181)$$

Chamaremos  $\vec{v}$  assim definida *velocidade relativa*. Para expressar  $\vec{v}$  em termos de  $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{e}_0) \cdot \mathbf{e}_0$  basta notarmos que

$$\vec{v} = \frac{d\tau}{dt} \frac{d\vec{x}}{d\tau}, \quad (182)$$

e com a ajuda da eq.(179) podemos ver que

$$\vec{v} = c \frac{(\mathbf{v} \wedge \mathbf{e}_0) \cdot \mathbf{e}_0}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_0} = c \frac{(\mathbf{v} \wedge \mathbf{e}_0)\mathbf{e}_0}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_0}. \quad (183)$$

Feito isso, agora devemos nos perguntar o que acontece em termos de um observador inercial descrito por

um vetor tipo-tempo constante  $\mathbf{u}$  ( $\mathbf{u}^2 = 1$ ,  $d\mathbf{u}/d\tau = 0$ ). A resposta para isso segue segundo o mesmo raciocínio acima, exceto que agora em lugar do vetor  $\mathbf{e}_0$  devemos considerar o vetor  $\mathbf{u}$ .

Dado o vetor  $\mathbf{x}$  escrevemos em analogia com a eq.(174),

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}\mathbf{u} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} + (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = ct'\mathbf{u} + \vec{x}', \quad (184)$$

onde

$$ct' = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}, \quad (185)$$

$$\vec{x}' = (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u})\mathbf{u}. \quad (186)$$

As quantidades  $t'$  e  $\vec{x}'$  são o *tempo* e a *posição* do evento dado de acordo com o observador  $\mathbf{u}$ . Estas quantidades são diferentes de  $t$  e  $\vec{x}$  dados na eq.(174). Para apreciarmos esta diferença precisamos da relação entre os vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{e}_0$ .

Como  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{e}_0$  são vetores tipo-tempo unitários, existe uma rotação no espaço-tempo que leva um vetor no outro. Podemos então escrever

$$\mathbf{u} = R\mathbf{e}_0R^{-1}, \quad (187)$$

onde  $R = LU$  segundo a eq.(172).

Porém,  $U\mathbf{e}_0U^{-1}$  corresponde a uma rotação espacial do vetor  $\mathbf{e}_0$ . Como uma rotação espacial ocorre no hiper-plano ortogonal a  $\mathbf{e}_0$  (ou seja, no espaço euclidiano tridimensional) ela não altera este vetor, de modo que devemos ter

$$U\mathbf{e}_0U^{-1} = \mathbf{e}_0. \quad (188)$$

Com isso podemos escrever a relação entre  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{e}_0$  como

$$\mathbf{u} = L\mathbf{e}_0L^{-1}, \quad (189)$$

ou seja, uma rotação puramente hiperbólica.

Como esta rotação hiperbólica acontece no plano definido pelos vetores  $\mathbf{e}_0$  e  $\mathbf{u}$ , podemos escrever  $L$  na forma

$$L = \exp\left(\frac{\nu}{2}B\right), \quad (190)$$

onde  $\nu$  é o ângulo hiperbólico e  $B$  é um bivetor tipo-tempo unitário ( $B^2 = 1$ ) que anti-comuta com  $\mathbf{e}_0$ ,

$$\mathbf{e}_0B = -B\mathbf{e}_0. \quad (191)$$

O fato que  $B$  deve anti-comutar com  $\mathbf{e}_0$  pode ser visto da seguinte forma. Dado um bivetor arbitrário  $B$  podemos sempre escrevê-lo na forma  $B = B_+ + B_-$ , onde  $B_+$  é a parte que comuta com  $\mathbf{e}_0$  e  $B_-$  é a parte que anti-comuta com  $\mathbf{e}_0$ . É simples verificarmos que  $B_{\pm} = (1/2)(B \pm \mathbf{e}_0B\mathbf{e}_0)$ . Também não é difícil verificarmos que  $B_+$  e  $B_-$  comutam, ou seja,  $B_+B_- = B_-B_+$ . Do fato que  $B_+$  e  $B_-$  comutam pode-se mostrar que  $\exp(B_+ + B_-) = \exp(B_+)\exp(B_-)$ . Portanto se  $L$  é da forma  $\exp((\nu/2)B)$  podemos escrevê-lo como  $L = \exp((\nu/2)B_-)\exp((\nu/2)B_+)$ . Mas

a parte  $\exp((\nu/2)B_+)$  corresponde justamente à transformação dada pela eq.(188). Logo sobra apenas a parte  $\exp((\nu/2)B_-)$ , que é justamente o que estamos considerando acima.

Com isso temos que

$$\mathbf{e}_0 L^{-1} = \mathbf{e}_0 \exp\left(\frac{-\nu}{2}B\right) = \exp\left(\frac{\nu}{2}B\right)\mathbf{e}_0 = L\mathbf{e}_0, \quad (192)$$

que usado na eq.(189) resulta que

$$\mathbf{u} = L^2 \mathbf{e}_0, \quad (193)$$

ou ainda

$$\mathbf{u}\mathbf{e}_0 = L^2. \quad (194)$$

Esta última expressão é particularmente útil pois no lado esquerdo está uma quantidade que já sabemos como lidar usando as eqs.(179) e (183). De fato,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\mathbf{e}_0 &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_0 + \mathbf{u} \wedge \mathbf{e}_0 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_0 + (\mathbf{u} \wedge \mathbf{e}_0)\mathbf{e}_0 \\ &= \gamma \left(1 + \frac{\vec{u}}{c}\mathbf{e}_0\right), \end{aligned} \quad (195)$$

onde, segundo a eq.(183),

$$\vec{u} = c \frac{(\mathbf{u} \wedge \mathbf{e}_0) \cdot \mathbf{e}_0}{\gamma} \quad (196)$$

é a velocidade relativa do observador e  $\gamma$  denota a quantidade

$$\gamma = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_0. \quad (197)$$

Podemos facilmente determinar  $\gamma$  através de um pequeno truque. Como  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{e}_0$  são unitários podemos escrever

$$1 = \mathbf{u}\mathbf{u} = \mathbf{u}\mathbf{e}_0\mathbf{e}_0\mathbf{u}. \quad (198)$$

Enquanto  $\mathbf{u}\mathbf{e}_0$  é dado pela eq.(195), para  $\mathbf{e}_0\mathbf{u}$  podemos escrever

$$\mathbf{e}_0\mathbf{u} = \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{u} + \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_0 - \mathbf{u} \wedge \mathbf{e}_0, \quad (199)$$

onde usamos as propriedades dos produtos  $\cdot$  e  $\wedge$  envolvendo vetores (eqs.139 e 140). Segue então das eqs.(196) e (197) que

$$\mathbf{e}_0\mathbf{u} = \gamma \left(1 - \frac{\vec{u}}{c}\mathbf{e}_0\right). \quad (200)$$

Com isso, da eq.(198) temos

$$1 = \gamma^2 \left(1 + \frac{\vec{u}}{c}\mathbf{e}_0\right) \left(1 - \frac{\vec{u}}{c}\mathbf{e}_0\right) = \gamma^2 \left(1 - \frac{(\vec{u}\mathbf{e}_0)^2}{c^2}\right), \quad (201)$$

ou seja,

$$\gamma = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad (202)$$

onde  $u^2 = (\vec{u}\mathbf{e}_0)^2$ . Uma vez que  $\vec{u}$  é da forma

$$\vec{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3 \quad (203)$$

e  $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_0 = -\mathbf{e}_0\mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) temos

$$u^2 = \vec{u}\mathbf{e}_0\vec{u}\mathbf{e}_0 = -\vec{u}\vec{u}\mathbf{e}_0\mathbf{e}_0 = -\vec{u}^2. \quad (204)$$

Como  $\vec{u}^2 \leq 0$  segue que

$$u^2 \geq 0. \quad (205)$$

Vamos agora determinar  $L$  explicitamente. Como  $L$  é da forma (190) temos

$$L^2 = \exp \nu B = \cosh \nu + \sinh \nu B, \quad (206)$$

onde  $B^2 = 1$ . Por outro lado, usando as eqs.(194) e (195) temos

$$L^2 = \gamma + \gamma \frac{\vec{u}}{c}\mathbf{e}_0 = \gamma + \gamma \frac{u}{c} \left(\frac{\vec{u}}{u}\mathbf{e}_0\right). \quad (207)$$

Comparando as duas últimas expressões temos

$$B = \frac{\vec{u}}{u}\mathbf{e}_0 \quad (208)$$

e

$$\cosh \nu = \gamma, \quad \sinh \nu = \gamma \frac{u}{c}. \quad (209)$$

A eq.(208) nos diz qual o bivector que gera a rotação hiperbólica em questão. Escrevendo

$$\frac{\vec{u}}{u} = \frac{u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3}{\sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2}} \quad (210)$$

o bivector  $B$  é

$$B = \frac{u_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_0 + u_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_0 + u_3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_0}{\sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2}}. \quad (211)$$

Já da eq.(209) segue que

$$\tanh \nu = \frac{u}{c}. \quad (212)$$

Esta expressão sem dúvida merece destaque! Ela relaciona o ângulo da rotação hiperbólica com a velocidade relativa. Chegamos assim à uma profunda *relação entre a cinemática relativística e geometria pseudo-euclídeana*. Devido à essa interpretação é comum chamarmos o ângulo hiperbólico  $\nu$  de *rapidez*. Note que para  $\nu \rightarrow \infty$  temos  $u \rightarrow c$ . Podemos ainda inverter a equação acima para expressar o ângulo hiperbólico  $\nu$  em termos da velocidade relativa  $u$  e o resultado é

$$\nu = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + u/c}{1 - u/c}\right). \quad (213)$$

Não bastasse isso, a eq.(212) permite obtermos de maneira trivial a fórmula para a adição de velocidades relativas. Para isso basta usarmos a fórmula para adição de ângulos hiperbólicos. Usando a definição das funções seno e co-seno hiperbólicos segue que  $\sinh(\nu_1 + \nu_2) = \sinh \nu_1 \cosh \nu_2 + \sinh \nu_2 \cosh \nu_1$  e  $\cosh(\nu_1 + \nu_2) = \cosh \nu_1 \cosh \nu_2 + \sinh \nu_1 \sinh \nu_2$ .

Usando estas expressões na definição de  $\tanh \nu = \sinh \nu / \cosh \nu$  chegamos sem dificuldade na “lei das tangentes hiperbólicas”:

$$\tanh(\nu_1 + \nu_2) = \frac{\tanh \nu_1 + \tanh \nu_2}{1 + \tanh \nu_1 \tanh \nu_2}. \quad (214)$$

Usando agora a eq.(212) com  $\tanh(\nu_1 + \nu_2) = \tanh \nu = u/c$ ,  $\tanh \nu_1 = u_1/c$  e  $\tanh \nu_2 = u_2/c$  segue imediatamente que

$$u = \frac{u_1 + u_2}{1 + (u_1 u_2 / c^2)}. \quad (215)$$

Esta é a conhecida lei de adição de velocidades dentro da TR.

Para prosseguirmos vamos simplificar um pouco as expressões assumindo que  $\vec{u}$  é da forma

$$\vec{u} = u \mathbf{e}_1. \quad (216)$$

Não há muita perda de generalidade com isso. Uma vez entendidos os cálculos que se seguem é possível reproduzi-los para  $\vec{u}$  da forma (203) sem muita dificuldade. Além de simplificarmos um pouco as expressões, nosso interesse com isso é também deixar as expressões numa forma mais familiar, o que permite uma melhor comparação entre os métodos mais tradicionais e o exposto aqui.

Com isso  $L$  fica sendo dado por

$$L = \exp\left(\frac{\nu}{2} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0\right), \quad (217)$$

onde  $\nu = \operatorname{arctanh}(u/c)$ . O vetor  $\mathbf{u}$  por sua vez fica sendo dado por

$$\mathbf{u} = \gamma \mathbf{e}_0 + \gamma \frac{u}{c} \mathbf{e}_1. \quad (218)$$

A relação entre  $t$  e  $t'$  pode ser agora facilmente obtida. Usando a eq.(174) (com  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  e  $x_3 = z$ ) para  $\mathbf{x}$  na eq.(185) temos

$$\begin{aligned} ct' &= (ct \mathbf{e}_0 + x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3) \cdot (\gamma \mathbf{e}_0 + \gamma \frac{u}{c} \mathbf{e}_1) \\ &= \gamma ct - \gamma x \frac{u}{c}, \end{aligned} \quad (219)$$

ou seja,

$$t' = \gamma \left( t - \frac{ux}{c^2} \right). \quad (220)$$

Já a eq.(186) nos fornece  $\vec{x}'$ . Usando a expressão acima para  $\mathbf{u}$  encontramos que

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \wedge \mathbf{u} &= (ct \mathbf{e}_0 + x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3) \wedge (\gamma \mathbf{e}_0 + \gamma(u/c) \mathbf{e}_1) \\ &= \gamma t u \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_1 + \gamma x \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_0 + \gamma y \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_0 \\ &\quad + \gamma z \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_0 + \gamma y(u/c) \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 + \gamma z(u/c) \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1, \end{aligned} \quad (221)$$

e daí

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} &= -\gamma^2 t u \mathbf{e}_1 + \gamma^2 x \mathbf{e}_1 + \gamma^2 y \mathbf{e}_2 + \gamma^2 z \mathbf{e}_3 \\ &\quad - \gamma^2 t (u^2/c) \mathbf{e}_0 + \gamma^2 x (u/c) \mathbf{e}_0 \\ &\quad - \gamma^2 y (u^2/c^2) \mathbf{e}_2 - \gamma^2 z (u^2/c^2) \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (222)$$

onde com alguns agrupamentos,

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} &= (x - tu) \gamma^2 (u/c) \mathbf{e}_0 + (x - tu) \gamma^2 \mathbf{e}_1 \\ &\quad + \gamma^2 (1 - u^2/c^2) y \mathbf{e}_2 + \gamma^2 (1 - u^2/c^2) z \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (223)$$

Usando agora a eq.(202) para  $\gamma$  encontramos que

$$\vec{x}' = (x - tu) \gamma^2 (u/c) \mathbf{e}_0 + (x - tu) \gamma^2 \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3. \quad (224)$$

Esta equação para  $\vec{x}'$  apresenta um problema. Primeiro, vamos olhar novamente para as eqs.(174) e (184). Nestas equações vemos que  $t$  e  $t'$  são as componentes de  $\mathbf{x}$  nas direções de  $\mathbf{e}_0$  e  $\mathbf{u}$ , respectivamente, e  $\vec{x}$  e  $\vec{x}'$  são os complementos ortogonais destes vetores em termos da decomposição ortogonal do espaço-tempo em “espaço” e “tempo”. Quando calculamos  $t'$  tomamos

justamente a projeção de  $\mathbf{x}$  na direção de  $\mathbf{u}$  e pudemos comparar  $t'$  com  $t$  pois  $\mathbf{u}$  está dado em termos de  $\mathbf{e}_0$ . Se quisermos agora encontrar alguma relação entre as componentes de  $\vec{x}'$  e as componentes de  $\vec{x}$  precisamos especificar a base do espaço (tridimensional) ortogonal a  $\mathbf{u}$ . A eq.(224) nos fornece corretamente o vetor  $\vec{x}'$  mas em termos da base  $\{\mathbf{e}_\mu\}$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ). Preci-

samos agora encontrar a base  $\{e'_\mu\}$  obtida à partir da base  $\{e_\mu\}$  pela rotação hiperbólica em consideração, ou seja,

$$e'_\mu = L e_\mu L^{-1}, \quad (\mu = 0, 1, 2, 3). \quad (225)$$

Para  $e'_0$  obviamente  $e'_0 = \mathbf{u}$ . Quanto aos demais vetores calculando a expressão acima encontramos que

$$\begin{aligned} e'_1 &= \gamma e_1 + \gamma(u/c)e_0, \\ e'_2 &= e_2, \\ e'_3 &= e_3. \end{aligned} \quad (226)$$

Agora podemos escrever  $\vec{x}'$  dado pela eq.(224) na forma

$$\vec{x}' = \gamma(x - tu)e'_1 + ye'_2 + ze'_3. \quad (227)$$

Uma vez que  $(x', y', z')$  são definidos como

$$\vec{x}' = x'e'_1 + y'e'_2 + z'e'_3 \quad (228)$$

encontramos comparando estas duas últimas equações que

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - tu), \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (229)$$

As eqs.(220) e (229) são justamente as celebradas *transformações de Lorentz*. Lembrando a definição de  $\gamma$  podemos escrever estas transformações explicitamente como

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\ x' &= \frac{x - tu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (230)$$

Essencialmente uma transformação de Lorentz é uma rotação hiperbólica. Estas transformações relacionam as coordenadas de um evento de acordo com dois observadores inerciais movendo-se um em relação ao outro com velocidade relativa  $\vec{u}$ . Seguindo a mesma linha de raciocínio que utilizamos para construir as figuras anteriores, podemos ilustrar estas coordenadas na Fig.13.

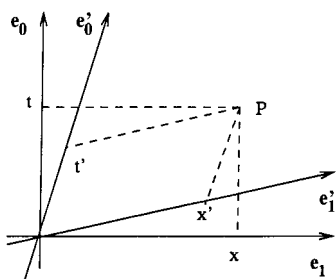


Figura 13. Coordenadas de um evento segundo dois observadores distintos.

Note que do mesmo modo que a coordenada  $x$  (resp.  $t$ ) é obtida traçando uma reta paralela à reta definida por  $e_0$  (resp.  $e_1$ ), a coordenada  $x'$  (resp.  $t'$ ) é obtida traçando uma reta paralela à reta definida por  $e'_0 = \mathbf{u}$  (resp.  $e'_1$ ).

Existe ainda uma outra forma de obtermos as fórmulas acima para as transformações de Lorentz. Esta consiste em interpretarmos de uma outra maneira uma rotação hiperbólica. Para entendermos como fazer isso vamos primeiro considerar a interpretação de uma rotação espacial. Para isso vamos considerar a transformação  $\mathbf{x} \mapsto U\mathbf{x}U^{-1}$  correspondendo a uma rotação espacial. Temos interpretado essa rotação espacial do vetor  $\mathbf{x}$  como resultando em um *novo* vetor  $\mathbf{x}'$  dado por  $\mathbf{x}' = U\mathbf{x}U^{-1}$ . Esta interpretação corresponde ao que chamamos *ponto de vista ativo*. Entretanto, podemos interpretar esta transformação segundo o que chamamos *ponto de vista passivo*. Segundo esta interpretação o vetor  $\mathbf{x}$  não é alterado mas sim as coordenadas desse vetor através da rotação dos vetores da base. Se do ponto de vista ativo a rotação do vetor  $\mathbf{x}$  acontece num dado sentido e por um certo ângulo, do ponto de vista passivo a rotação dos vetores da base acontece no sentido *oposto* e pelo mesmo ângulo. Ilustramos isso na Fig.14.

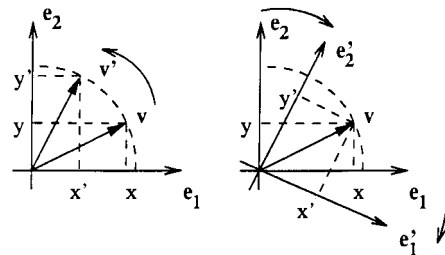


Figura 14. Interpretação de uma rotação espacial segundo o ponto de vista ativo (figura à esquerda) e passivo (figura à direita).

No caso de uma rotação hiperbólica as mesmas interpretações são possíveis. Podemos interpretar a transformação  $\mathbf{x} \mapsto L\mathbf{x}L^{-1}$  do ponto de vista ativo, significando que o resultado desta transformação é um novo vetor  $\mathbf{x}'$  obtido pela rotação hiperbólica do vetor  $\mathbf{x}$  num dado sentido e por um certo ângulo hiperbólico. Ou então do ponto de vista passivo, onde o vetor  $\mathbf{x}$  permanece inalterado e os vetores da base sofrem uma rotação hiperbólica pelo mesmo ângulo mas no sentido oposto. Na Fig.15 ilustramos estes dois casos.

As transformações de Lorentz relacionam as coordenadas de um *mesmo evento* segundo dois observadores inerciais. Logo, se quisermos obter as expressões para estas transformações diretamente da expressão para uma rotação hiperbólica devemos interpretá-la no sentido *passivo*.

Para sermos mais específicos, vamos considerar o caso envolvendo dois observadores inerciais definidos

por  $\mathbf{e}_0$  e  $\mathbf{u}$  tais que  $\mathbf{u} = L\mathbf{e}_0L^{-1}$ . Do ponto de vista da álgebra geométrica uma transformação da forma  $\mathbf{x} \mapsto L\mathbf{x}L^{-1}$  é interpretada no sentido ativo, ou seja,

ela define um novo vetor  $\mathbf{x}'$  dado por  $\mathbf{x}' = L\mathbf{x}L^{-1}$ . Para  $L$  dado pela eq.(217),  $\mathbf{x}' = L\mathbf{x}L^{-1}$  é dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= ct(\gamma\mathbf{e}_0 + \gamma(u/c)\mathbf{e}_1) + x(\gamma\mathbf{e}_1 + \gamma(u/c)\mathbf{e}_0) + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \\ &= \gamma(ct + ux/c)\mathbf{e}_0 + \gamma(x + ut)\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3.\end{aligned}\quad (231)$$

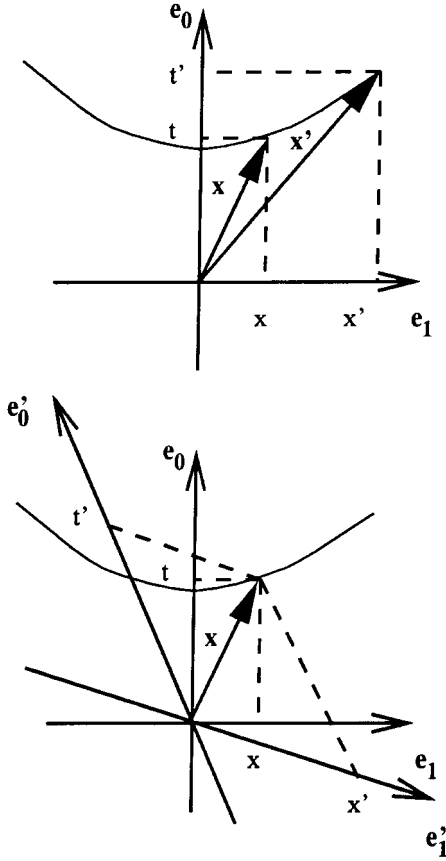


Figura 15. Interpretação de uma rotação hiperbólica segundo o ponto de vista ativo (figura superior) e passivo (figura inferior).

Escrevendo  $\mathbf{x}' = ct'\mathbf{e}_0 + x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 + z'\mathbf{e}_3$  segue que

$$\begin{aligned}t' &= \gamma(t + ux/c^2), & x' &= \gamma(x + ut), \\ y' &= y, & z' &= z,\end{aligned}\quad (232)$$

que *não* são as transformações de Lorentz dadas pelas eqs.(220) e (229). A eq.(232) fornece as coordenadas de um novo evento  $\mathbf{x}'$  de acordo com o observador inercial definido por  $\mathbf{e}_0$ . Esta é a interpretação do ponto de vista ativo e é a única interpretação possível para a transformação  $\mathbf{x} \mapsto L\mathbf{x}L^{-1}$ .

Para escrevermos esta rotação hiperbólica do ponto de vista passivo em termos da álgebra geométrica do

espaço-tempo podemos utilizar um truque. O que precisamos é “simular” o ponto de vista passivo em termos do ponto de vista ativo. Como já discutimos, do ponto de vista passivo a rotação hiperbólica é considerada no sentido oposto (e pelo mesmo ângulo hiperbólico). Pensando do ponto de vista ativo, esta rotação hiperbólica no sentido inverso pode ser vista como a transformação inversa da transformação  $\mathbf{x} \mapsto L\mathbf{x}L^{-1}$ . Esta transformação é obviamente  $\mathbf{x} \mapsto L^{-1}\mathbf{x}L$ . Portanto a transformação *ativa*  $\mathbf{x} \mapsto \tilde{\mathbf{x}} = L^{-1}\mathbf{x}L$  pode ser interpretada do ponto de vista passivo como definindo as *novas coordenadas* do vetor  $\mathbf{x}$  em termos da base  $\{\mathbf{e}'_\mu\}$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) dada por  $\mathbf{e}'_\mu = L\mathbf{e}_\mu L^{-1}$ . A melhor maneira de nos convenceremos disso é efetuando explicitamente os cálculos. De fato, para  $\tilde{\mathbf{x}} = L^{-1}\mathbf{x}L$  temos

$$\tilde{\mathbf{x}} = \gamma(ct - ux/c)\mathbf{e}_0 + \gamma(x - ut)\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3. \quad (233)$$

Escrevendo  $\tilde{\mathbf{x}} = ct'\mathbf{e}_0 + x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 + z'\mathbf{e}_3$  segue que

$$\begin{aligned}t' &= \gamma(t - ux/c^2), & x' &= \gamma(x - ut), \\ y' &= y, & z' &= z,\end{aligned}\quad (234)$$

que são justamente as transformações de Lorentz procuradas. Portanto, o *novo* vetor  $\tilde{\mathbf{x}}$  obtido através da transformação  $\mathbf{x} \mapsto \tilde{\mathbf{x}} = L^{-1}\mathbf{x}L$  é tal que as suas componentes em termos da base  $\{\mathbf{e}_\mu\}$  são as mesmas componentes do vetor  $\mathbf{x}$  em termos da base  $\{\mathbf{e}'_\mu\}$  dada por  $\mathbf{e}'_\mu = L\mathbf{e}_\mu L^{-1}$ . Temos assim uma receita de como “simular” o ponto de vista passivo em termos do ponto de vista ativo, que é o que deve ser usado ao olharmos para uma rotação espacial ou hiperbólica através das operações da álgebra geométrica. Embora isso misture dois pontos de vista diferentes, sem dúvida o procedimento é simples e eficiente do ponto de vista computacional. Por outro lado, o procedimento usado anteriormente para obtermos as transformações de Lorentz nos parece do ponto de vista conceitual mais completo.

Vamos agora olhar para a dinâmica relativística. A dinâmica do movimento de uma partícula pode ser especificada na TR através da generalização da segunda lei de Newton. A generalização natural desta lei é

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau}, \quad (235)$$

onde  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{p}$  são as generalizações em termos do espaço-tempo dos conceitos clássicos de *força* e *momentum*,



respectivamente. Vamos considerar agora estas generalizações.

Para o vetor  $\mathbf{p}$ , que denominaremos *momentum próprio* da partícula, podemos escrever

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= \mathbf{p}\mathbf{e}_0\mathbf{e}_0 = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_0)\mathbf{e}_0 + (\mathbf{p} \wedge \mathbf{e}_0) \cdot \mathbf{e}_0 \\ &= \frac{E}{c}\mathbf{e}_0 + \vec{p},\end{aligned}\quad (236)$$

onde definimos a *energia própria*  $E$  da partícula como

$$E = c(\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_0),\quad (237)$$

e o *momentum relativo*  $\vec{p}$  como

$$\begin{aligned}\vec{p} &= (\mathbf{p} \wedge \mathbf{e}_0) \cdot \mathbf{e}_0 = (\mathbf{p} \wedge \mathbf{e}_0)\mathbf{e}_0 \\ &= p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 + p_3\mathbf{e}_3.\end{aligned}\quad (238)$$

Por estas definições o vetor  $\mathbf{p}$  é também às vezes denominado vetor energia-momentum.

A *massa própria* da partícula é definida pela norma do vetor  $\mathbf{p}$ . Iremos postular que para partículas massivas  $\mathbf{p}$  é um vetor *tipo-tempo*, ou seja,  $\mathbf{p}^2 > 0$ . Definimos então a massa própria  $m_0$  através de

$$(m_0)^2 = \frac{\mathbf{p}^2}{c^2}.\quad (239)$$

Por outro lado, para  $\mathbf{p}^2$  temos

$$\begin{aligned}\mathbf{p}^2 &= \left(\frac{E}{c}\mathbf{e}_0 + \vec{p}\right) \left(\frac{E}{c}\mathbf{e}_0 + \vec{p}\right) \\ &= \frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^2,\end{aligned}\quad (240)$$

e como

$$\begin{aligned}\vec{p}^2 &= (p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 + p_3\mathbf{e}_3)^2 \\ &= -(p_1)^2 - (p_2)^2 - (p_3)^2 = -p^2,\end{aligned}\quad (241)$$

podemos escrever

$$\mathbf{p}^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2.\quad (242)$$

Agora, comparando as eqs.(239) e (242), podemos escrever

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2.\quad (243)$$

Na mecânica clássica o momentum  $\vec{p}$  de uma partícula é definido como  $\vec{p} = m_0 \vec{v}$ , onde  $m_0$  é a massa da partícula. A generalização natural desta definição é

$$\mathbf{p} = m_0 c \mathbf{v},\quad (244)$$

onde  $\mathbf{v}$  é a velocidade própria da partícula (eq.177). Esta definição é coerente; uma vez que  $\mathbf{v}^2 = 1$  ela implica que  $\mathbf{p}^2 = (m_0 c)^2$ , que é justamente a eq.(239).

Das eqs.(179) e (183) podemos escrever

$$\mathbf{v} = \gamma \mathbf{e}_0 + \gamma \frac{\vec{v}}{c},\quad (245)$$

onde  $\vec{v}$  é a velocidade relativa da partícula e

$$\gamma = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_0 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}.\quad (246)$$

Usando a eq.(245) na eq.(244) temos que

$$\mathbf{p} = m_0 c \gamma \mathbf{e}_0 + m_0 \gamma \vec{v}.\quad (247)$$

Comparando agora as eqs.(236) e (247) segue que

$$E = m_0 c^2 \gamma,\quad (248)$$

e

$$\vec{p} = m_0 \gamma \vec{v},\quad (249)$$

que é claramente uma generalização da expressão clássica.

Suponha que a velocidade relativa da partícula seja nula,  $\vec{v} = 0$ . Portanto  $\vec{p} = 0$ ,  $p^2 = 0$  e a eq.(243) implica nesse caso que

$$E^2 = (m_0 c^2)^2, \quad (\vec{v} = 0).\quad (250)$$

Como  $E = c(\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_0) = m_0 c^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_0)$  e  $\mathbf{v}$  é um vetor tipo-tempo que aponta para o futuro ( $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_0 > 0$ ) temos que  $E > 0$  e como solução da eq.(250)

$$E = m_0 c^2, \quad (\vec{v} = 0).\quad (251)$$

Essa é a energia própria de uma partícula em repouso ( $\vec{v} = 0$ ), daí também denominarmos esta quantidade *energia de repouso* e denotá-la por  $E_0$ , ou seja,

$$E_0 = m_0 c^2.\quad (252)$$

Da eq.(249) temos que  $p^2 = m_0^2 \gamma^2 v^2$ , que por sua vez na eq.(243) implica que

$$\begin{aligned}E^2 &= m_0^2 c^4 + m_0^2 c^2 \gamma^2 v^2 \\ &= m_0^2 c^4 \left(1 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2}\right).\end{aligned}\quad (253)$$

Usando a eq.(246) vemos que

$$\left(1 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2}\right) = \left(1 + \frac{v^2/c^2}{1 - v^2/c^2}\right) = \gamma^2,\quad (254)$$

e para a eq.(253) obtemos que

$$E^2 = m_0^2 c^4 \gamma^2.\quad (255)$$

Como  $E > 0$  a solução é

$$E = m_0 \gamma c^2.\quad (256)$$

Esta equação nos fornece a energia própria de uma partícula. Definindo uma massa relativa  $m$  como

$$E = m c^2,\quad (257)$$

temos

$$m = m_0 \gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (258)$$

Quando  $\vec{v} = 0$  temos então  $m = m_0$ .

Para o vetor  $\mathbf{F}$ , que denominaremos *força própria* ou *força de Minkowski*, escrevemos como nos casos anteriores

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_0) \mathbf{e}_0 + (\mathbf{F} \wedge \mathbf{e}_0) \cdot \mathbf{e}_0 \\ &= \frac{W}{c} \mathbf{e}_0 + \vec{f}. \end{aligned} \quad (259)$$

Escrevendo  $\mathbf{p}$  na forma (236), a lei de movimento (235) implica que

$$W = \frac{dE}{d\tau} = \gamma \frac{dE}{dt}, \quad (260)$$

e

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \gamma \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (261)$$

onde usamos  $\gamma = dt/d\tau$ . A eq.(261) é uma evidente generalização da segunda lei de Newton, onde  $\vec{f}$  é o que chamamos *força relativa*. Já a eq.(260) trata-se de uma generalização da relação clássica entre *potência*  $W$  e variação de energia.

Podemos ainda definir a *aceleração própria* de uma partícula como

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{d\tau}. \quad (262)$$

A lei do movimento pode então ser escrita na forma

$$\mathbf{F} = m_0 c \mathbf{a}. \quad (263)$$

Já a relação entre a força relativa e aceleração relativa é um pouco mais complicada. Como nos casos anteriores, vamos escrever  $\mathbf{a}$  como

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_0) \mathbf{e}_0 + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{e}_0) \cdot \mathbf{e}_0. \quad (264)$$

Para a força relativa  $\vec{f}$  temos portanto

$$\vec{f} = m_0 c (\mathbf{a} \wedge \mathbf{e}_0) \cdot \mathbf{e}_0. \quad (265)$$

O termo do lado direito é

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{e}_0) \cdot \mathbf{e}_0 &= \frac{d}{d\tau} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{e}_0) \cdot \mathbf{e}_0 = \gamma \frac{d}{dt} \left( \frac{\gamma}{c} \vec{v} \right) \\ &= \frac{\gamma^2}{c} \vec{a} + \frac{\gamma}{c} \frac{d\gamma}{dt} \vec{v}, \end{aligned} \quad (266)$$

onde usamos a definição da *aceleração relativa*  $\vec{a}$ ,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (267)$$

A quantidade  $d\gamma/dt$  pode ser facilmente calculada à partir da eq.(246), lembrando que  $v^2 = -\vec{v}^2$ . O resultado é que

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{\gamma^3}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{a} = \frac{\gamma^3}{c^2} \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle, \quad (268)$$

onde definimos

$$\langle \vec{v}, \vec{a} \rangle = -\vec{v} \cdot \vec{a} = -\frac{1}{2} (\vec{v} \vec{a} - \vec{a} \vec{v}), \quad (269)$$

de modo que  $v^2 = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ .

Com isso a eq.(265) pode ser finalmente escrita na forma

$$\vec{f} = m_0 \gamma^2 \vec{a} + m_0 \frac{\gamma^4}{c^2} \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle \vec{v}, \quad (270)$$

que é a generalização relativística da segunda lei de Newton  $\vec{f} = m_0 \vec{a}$ .

## VIII Conclusões

Nosso principal objetivo neste artigo foi apresentar a álgebra geométrica do espaço-tempo como uma estrutura natural e eficiente para a formulação da TR. As vantagens desse formalismo são várias e esperamos ter exibido algumas delas claramente ao longo do texto.

Uma das maiores vantagens das álgebras geométricas é a sua generalidade. A definição da álgebra geométrica de um espaço é geral, não importando a dimensão deste espaço ou suas propriedades métricas. Com isso os principais conceitos podem ser introduzidos tomando exemplos simples como os relativos ao plano, preparando assim o terreno para a consideração de casos mais complexos através de generalizações quase triviais dos casos mais simples. Foi exatamente isso que tentamos fazer ao longo do texto. Muitos dos aspectos principais da álgebra geométrica do espaço-tempo já se encontram presentes nas álgebras geométricas dos planos euclideo e pseudo-euclideo, o que facilita demasiadamente a consideração de um caso onde o número de dimensões é um obstáculo para a compreensão.

O caráter pseudo-euclideo de um espaço pode também ser melhor compreendido através das álgebras geométricas. O fato da mesma estrutura poder ser utilizada nos casos euclideo e pseudo-euclideo permite através do estudo comparativo uma elaboração das diferenças e similaridades destes espaços e consequentemente uma melhor compreensão da natureza de um espaço pseudo-euclideo.

As álgebras geométricas permitem portanto contornar dois dos maiores obstáculos no entendimento da TR: a quadridimensionalidade e o caráter pseudo-euclideo do espaço-tempo. Além disso, temos uma estrutura matemática adequada para lidar com uma vasta classe de problemas e não apenas a TR. Em [1] discutimos o uso da álgebra geométrica do espaço euclideo tridimensional dentro da teoria de Pauli (que é a generalização da teoria de Schrödinger de modo a incluir o *spin*) da Mecânica Quântica não-relativística. Mecânica [2] e Eletromagnetismo [3] são eficientemente estudadas usando álgebras geométricas. Se em casos como estes as álgebras geométricas apresentam-se

como alternativas, em casos como na teoria de Dirac da Mecânica Quântica Relativística elas se apresentam como *necessárias e indispensáveis*. A chamada “álgebra da matrizes Gama” [7], que é a estrutura fundamental da teoria de Dirac, nada mais é do que uma álgebra geométrica de Clifford. Usualmente a teoria de Dirac é formulada em termos da complexificação da álgebra geométrica do espaço-tempo mas isso não é necessário e a teoria de Dirac pode ser inteiramente formulada em termos da álgebra geométrica do espaço-tempo [8-10]. O formalismo de segunda quantização nas teorias quânticas de campos também se baseiam em álgebras geométricas. Enfim, ao contrário de muitos formalismos cuja aplicabilidade se limita a uma certa classes de problemas, as álgebras geométricas possuem um certo caráter de universalidade.

Finalmente, com relação a aplicações da álgebra geométrica do espaço-tempo na solução de problemas da TR, nos limitaremos a indicar algumas referências. Um problema padrão como o de uma partícula uniformemente acelerada dentro da TR é discutido em [3] usando a álgebra geométrica do espaço-tempo. Os movimentos de precessão de Thomas e de Larmor são discutidos em [11]. O movimento de partículas carregadas em um campo eletromagnético homogêneo, em um campo de ondas planas e em um campo de Coulomb são discutidos em [12]. Nas referências [11,12] é apresentado um tratamento da TR usando a álgebra geométrica do espaço-tempo um pouco distinto do apresentado por nós na sec.7. Na verdade acreditamos que o tratamento de [11,12] apresenta algumas dificuldades (as quais não cabe aqui e agora discutir). O leitor interessado não deverá ter muitas dificuldades em comparar estes dois tratamentos e estudar estes problemas. Outras referências sobre álgebras geométricas e suas aplicações podem ser encontradas na lista de referências de [1].

### Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer aos Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira e Prof. Dr. Waldyr A. Rodrigues pela leitura do manuscrito, discussões e sugestões. Gos-

taríamos também de agradecer a todos que manifestaram suas opiniões e comentários a respeito do nosso artigo anterior [1], o que foi um enorme incentivo para a elaboração do presente artigo.

### References

- [1] J. Vaz, Jr., “A álgebra geométrica do espaço euclidiano e a teoria de Pauli”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, **19**, 234 (1997).
- [2] D. Hestenes, *New Foundations for Classical Mechanics*, Kluwer (1989).
- [3] B. Jancewicz, *Mutivectors and Clifford Algebra in Electrodynamics*, World Scientific (1988).
- [4] A. Crumeyrolle, *Orthogonal and Symplectic Clifford Algebras*, Kluwer (1990).
- [5] R. v. B. Rucker, *Geometry, Relativity and the Fourth Dimension*, Dover (1977).
- [6] A. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*, MacMillan Co. (1964); republicação: Dover (1980).
- [7] I. Benn e R. Tucker, *An Introduction to Spinors and Geometry (with applications in Physics)*, Adam Hilger (1987).
- [8] J. Vaz, Jr. e W. A. Rodrigues, Jr., “Maxwell and Dirac theories as an already unified theory”, *Advances in Applied Clifford Algebras*, **7 S**, 369 (1997); também disponível como “hep-th 9511181” em <http://xxx.if.usp.br> (<http://xxx.lanl.gov>).
- [9] W. A. Rodrigues, Jr. e J. Vaz, Jr., “From electromagnetism to relativistic quantum mechanics”, *Foundations of Physics*, **28**, 789 (1998).
- [10] S. de Leo, W. A. Rodrigues, Jr. e J. Vaz, Jr., “Complex geometry and Dirac equation”, *International Journal of Theoretical Physics*, **37**, 2415 (1998).
- [11] D. Hestenes, “Proper particle mechanics”, *Journal of Mathematical Physics*, **15**, 1768 (1974).
- [12] D. Hestenes, “Proper dynamics of a rigid point particle”, *Journal of Mathematical Physics*, **15**, 1778 (1974).