MT307 B & MS901 B – Lista 1

(1) Mostre que qualquer 2-vetor em um espaço tridimensional pode ser escrito na forma do produto exterior de dois vetores, ou seja, na forma $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

(2) Mostre que qualquer $(N-1)$-vetor em um espaço de dimensão N pode ser escrito na forma do produto exterior de $(N-1)$ vetores, ou seja, $\mathbf{v}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_{N-1}$.
Sugestão: use o princípio de indução em N. Note que para $N = 2$ não há o que ser provado, e para $N = 3$ o resultado foi provado no problema anterior.

(3) Defina a exponencial exterior através de

$$\exp(\mathbf{A}) = 1 + \mathbf{A} + \frac{1}{2!}\mathbf{A} \wedge \mathbf{A} + \frac{1}{3!}\mathbf{A} \wedge \mathbf{A} \wedge \mathbf{A} + \ldots + \frac{1}{n!}\underbrace{\mathbf{A} \wedge \mathbf{A} \wedge \cdots \wedge \mathbf{A}}_{n\text{vezes}} + \ldots$$

onde $\mathbf{A}$ é um elemento arbitrário da álgebra exterior de um espaço vetorial V. Calcule $\exp(\mathbf{a})$ e $\exp(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{c} \wedge \mathbf{d})$, onde $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in V$.

(4) Seja T uma transformação linear $\mathsf{T} : V \to V$. Podemos definir a extensão $\mathsf{T}^{\wedge k}$ dessa transformação para o espaço dos k-vetores através de

$$\mathsf{T}^{\wedge k}(\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k) = (\mathsf{T}(\mathbf{v}_1)) \wedge \cdots \wedge (\mathsf{T}(\mathbf{v}_k)).$$

Mostre que

$$(\mathsf{ST})^{\wedge k} = \mathsf{S}^{\wedge k}\mathsf{T}^{\wedge k}.$$

Seja ω um N-vetor arbitrário não nulo, onde $N = \dim V$. Defina $\det \mathsf{T}$ através de

$$\mathsf{T}^{\wedge N}(\omega) = (\det \mathsf{T})\omega.$$

Considere o caso particular $N = 3$ e mostre que nesse caso a definição acima coincide com a definição bem conhecida do determinante. Use a definição acima para provar a propriedade

$$\det(\mathsf{ST}) = \det \mathsf{S} \det \mathsf{T}$$

e também para provar o teorema de Laplace do desenvolvimento de determinantes.

(5) Seja A e B multivetores de um espaço vetorial V, com $\dim V = N$. Defina um produto $A \vee B$ através de

$$\star(A \vee B) = (\star A) \wedge (\star B),$$

onde $\wedge : \bigwedge^k(V) \times \bigwedge^l(V) \to \bigwedge^{k+l}(V)$ denota o produto exterior e $\star : \bigwedge^k(V) \to \bigwedge^{N-k}(V)$ denota o operador de dualidade de Hodge, ou seja,

$$B_k \wedge (\star A_k) = (B_k \cdot A_k)\tau, \qquad \forall B_k \in \bigwedge{}^k(V).$$

onde $\tau \in \bigwedge^N(V)$ e $\tau \cdot \tau = 1$. Considere $V = \mathbb{R}^3$. Construa a tabela de multiplicação entre os m-vetores ($m = 0, 1, 2, 3$) com esse produto $\vee$. Defina

$$\bigvee{}^k(V) = \bigwedge{}^{N-k}(V),$$

onde $N = \dim V$. Interprete esta tabela de multiplicação em termos dos espaços $\bigvee^k(\mathbb{R}^3)$ ($k = 0, 1, 2, 3$).

Data de entrega: 04/10/2013