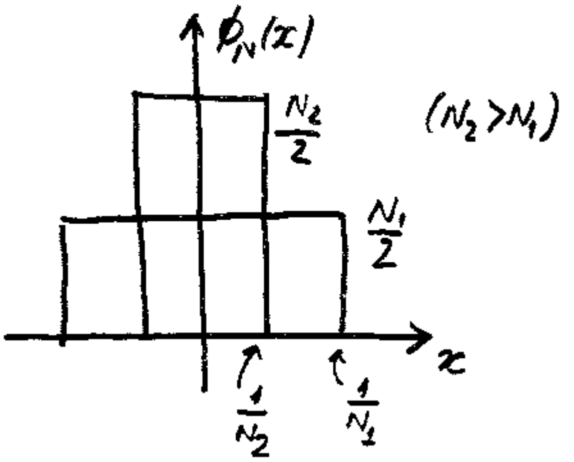
III) NOÇÕES BÁSICAS DE TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES

III.1) MOTIVAÇÕES

Vamos considerar a função $\phi_N(x)$ definida como

$$\phi_N(x) = \begin{cases} \dfrac{N}{2}, & |x| \le \dfrac{1}{N} \\ 0, & |x| > \dfrac{1}{N} \end{cases}$$



A série de Fourier dessa função já foi calculada (pg. 13, onde $a = 1/N$) tomando $L > \frac{1}{N}$, ou seja,

$$\phi_N(x) = \frac{1}{2L} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{N}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{NL} \right) \cos \frac{n\pi x}{L}$$

É fácil notarmos que à medida que aumentamos N, a função $\phi_N(x)$ fica cada vez mais concentrada em torno de $x = 0$. A idéia intuitiva é que, para $N \to \infty$, devemos ter

$$\lim_{N\to\infty} \phi_N(x) \text{ "="} \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

O problema, porém, é que não há sentido em definirmos uma função cujo valor em um ponto seja $+\infty$. Também não temos como contornar esse problema trabalhando com a série de Fourier pois ela <u>não</u> converge para $N \to \infty$; de fato:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \left(\frac{N}{n\pi} \sin\frac{n\pi}{NL}\right) \cos\frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{L} \cos\frac{n\pi x}{L}$$

que evidentemente não converge.

Por outro lado, do teorema referente à integração da série de Fourier (pg. 60) sabemos que se $\phi_N(x)$ é contínua por partes, vale a identidade relacionada com a integração da série independentemente da série convergir ou não. De fato:

$$\int_{-L}^{L} dx\, \phi_N(x) = \int_{-1/N}^{1/N} dx \cdot \frac{N}{2} = \frac{N}{2}\left(\frac{2}{N}\right) = 1$$

$$\int_{-L}^{L} dx \left(\frac{1}{2L} + \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{N}{n\pi} \sin\frac{n\pi}{NL} \cos\frac{n\pi x}{L}\right) =$$

$$= \frac{1}{2L} \cdot 2L + \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{N}{n\pi} \sin\frac{n\pi}{NL} \cdot \frac{L}{n\pi} \cancel{\sin\frac{n\pi x}{L}}^{\,0} \Big|_{-L}^{L} = 1$$

ou seja,

$$\int_{-L}^{L} dx\, \phi_N(x) = \int_{-L}^{L} dx \left(\frac{1}{2L} + \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{N}{n\pi} \sin\frac{n\pi}{NL} \cos\frac{n\pi x}{L} \right) = 1\ , \ \forall N$$

de modo que

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} \int_{-L}^{L} dx\, \phi_N(x) = 1}$$

embora não exista $\lim\limits_{N\to\infty} \phi_N(x)$!

Na verdade podemos ir mais além. Seja $f(x)$ uma função que por enquanto basta supor que possa ser representada por uma série de Fourier. Então:

$$\int_{-L}^{L} dx\, f(x)\, \phi_N(x) = \int_{-L}^{L} dx \left(\frac{1}{2L} + \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{N}{n\pi} \sin\frac{n\pi}{NL} \cos\frac{n\pi x}{L} \right) f(x)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} dx\, f(x) \right] + \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{NL}{n\pi} \sin\frac{n\pi}{NL} \left[\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} dx\, f(x) \cos\frac{n\pi x}{L} \right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}{}' a_n \frac{NL}{n\pi} \sin\frac{n\pi}{NL}$$

onde a_0 e a_n são os coeficientes de Fourier de $f(x)$,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}{}' \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \right)$$

Tomando $N \to \infty$:

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-L}^{L} dx\, f(x)\, \phi_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}{}' a_n$$

que nada mais é do que $f(0)$,

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} \int_{-L}^{L} dx\, f(x)\, \phi_N(x) = f(0)}$$

muito embora

$$\boxed{\nexists \lim_{N\to\infty} \phi_N(x)}$$

Na verdade nós já nos deparamos com uma situação análoga. Do teorema de Fourier e da expressão para o núcleo de Dirichlet, temos (considerando um período $T=2L$)

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \int_{-L}^{L} d\xi\, f(\xi)\, D_N(\xi - x)$$

onde

$$D_N(x) = \frac{1}{2L} \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}}{\sin \frac{1}{2}\frac{\pi x}{L}}$$

Como podemos ver

$$\boxed{\nexists \lim_{N\to\infty} D_N(x)}$$

e mesmo assim

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} \int_{-L}^{L} dx\, f(x)\, D_N(x) = f(0)} \qquad \boxed{\lim_{N\to\infty} \int_{-L}^{L} dx\, D_N(x) = 1}$$

Temos, portanto, sequências que não convergem no sentido usual mas que, quando tomadas dentro de uma integral com uma função $f(x)$, convergem para o mesmo resultado, no caso $f(0)$. Podemos pensar que essas sequências convergem (em um outro sentido) para uma "função" $\delta(x)$ tal que $\int_{-L}^{L} dx\, \delta(x) f(x) = f(0)$. Essa é a idéia que usaremos. Além disso, para aumentar a classe de sequências que consideraremos, vamos tomar $L \to \infty$, e para assegurar que as integrais estejam bem definidas, vamos restringir o conjunto das funções $f(x)$ que tomaremos nas integrais.

III.2 FUNÇÃO DELTA DE DIRAC

$\Rightarrow$ DEF: Uma função-teste é uma função infinitamente diferenciável tal que ela é identicamente nula fora de um intervalo finito (a,b). Denotaremos o conjunto das funções-teste por $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

EX Um exemplo clássico de função-teste é

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-x^2)} & , \ |x| < 1 \\ 0 & , \ |x| \geq 1 \end{cases}$$

Outros exemplos seguem quando notamos que se $f(x)$ é uma função-teste e $\varphi(x)$ é uma função infinitamente diferenciável, então $\varphi(x) f(x)$ é uma função-teste. //

DEF: Uma <u>sequência</u> <u>delta</u> é uma sequência $\{\phi_n(x)\}$ satisfazendo

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x)\, dx = 1}$$

e, para $f(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x) f(x)\, dx = f(0)}$$

Definimos a <u>FUNÇÃO</u> <u>DELTA</u> <u>DE</u> <u>DIRAC</u> como sendo o limite de uma sequência delta, onde esse limite é interpretado no sentido de

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x) f(x)\, dx}$$

Sendo assim, a função delta de Dirac satisfaz

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)}$$

Evidentemente $\delta(x)$ não é uma "função" no sentido usual. Ela é o que chamamos uma "função generalizada" ou "distribuição".

EX Exemplos de sequência delta, além daquelas da seção anterior, são:

i) $$\phi_n(x) = \frac{n}{\pi} \frac{1}{1+n^2x^2}$$

ii) $$\phi_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}$$

iii) $$\phi_n(x) = \frac{1}{n\pi} \frac{\sin^2 nx}{x^2}$$

iv) $$\phi_n(x) = n J_n(n(1+x))$$

v) $$\phi_n(x) = n e^{-nx^2} L_K(2nx)$$

onde $J_n(x)$ é a função de Bessel de ordem n e $L_K(x)$ é o polinômio de Laguerre de ordem K (arbitrário)

//

Podemos ainda definir a função delta transladada $\delta(x-a)$. Nesse caso:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)\, f(x)\, dx = f(a)}$$

Para vermos isso usamos a definição via sequência delta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x-a) f(x)\, dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(y) f(y+a)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y) f(y+a)\, dy = f(a)$$

Isso, aliás, mostra que podemos fazer mudanças de variáveis diretamente dentro da integral com a função delta. Dessa forma podemos mostrar, por exemplo, que $(a \neq 0)$

$$\boxed{\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\, \delta(x)}$$

De fato, se $a>0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax) f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y) f(y/a) \frac{dy}{a} = \frac{f(0)}{a} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(x)}{|a|} f(x)\,dx$$

enquanto, se $a<0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax) f(x)\,dx = \int_{+\infty}^{-\infty} \delta(y) f(y/a) \frac{dy}{a} = -\frac{f(0)}{a} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(x)}{|a|} f(x)\,dx$$

Já com um pouco mais de engenhosidade, podemos mostrar que $(a\neq 0)$:

$$\boxed{\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2|a|}\left[\delta(x+a) + \delta(x-a)\right]}$$

Para isso vamos considerar as funções-teste que são identicamente nulas fora do intervalo $(-a,a)$. Vamos denotar esse conjunto por $\mathcal{D}(-a,a)$, de modo que $\mathcal{D}(-a,a) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Tomando $x^2-a^2=y$, temos que para $x\geq 0$, $x=\sqrt{y+a^2}$, $-a^2\leq y<\infty$, enquanto para $x\leq 0$, $x=-\sqrt{y+a^2}$, $-a^2\leq y<\infty$. Logo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x^2-a^2) f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} \delta(x^2-a^2) f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} \delta(x^2-a^2) f(x)\,dx =$$

$$= \int_{\infty}^{-a^2} \delta(y) f(-\sqrt{y+a^2}) \frac{(-dy)}{2\sqrt{y+a^2}} + \int_{-a^2}^{\infty} \delta(y) f(\sqrt{y+a^2}) \frac{(dy)}{2\sqrt{y+a^2}}$$

$$= \frac{f(-\sqrt{a^2})}{2\sqrt{a^2}} + \frac{f(\sqrt{a^2})}{2\sqrt{a^2}} = \frac{1}{2|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(x+a) + \delta(x-a)] f(x)\, dx$$

onde usamos que $f(x) \in \mathcal{D}(-a,a)$. Portanto $\delta(x^2-a^2)$ age sobre $f \in \mathcal{D}(-a,a)$ de uma forma tal que é a mesma que $\frac{1}{2|a|}[\delta(x+a) + \delta(x-a)]$ agindo sobre $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Dentro do cálculo com a função delta, é natural procurarmos definir a derivada $\delta'(x)$. Se $\{\phi_n(x)\}$ é uma sequência delta, definimos $\delta'(x)$ como a distribuição associada com as derivadas dessa sequência, ou seja:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x) f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n'(x) f(x)\, dx}$$

onde $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Mas, integrando por partes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n'(x) f(x) dx = \phi_n(x) f(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x) f'(x) dx$$

e como $f(x) \equiv 0$ para $x \notin (a,b)$, de modo que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$,

$$\phi_n(x) f(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

e portanto:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n'(x) f(x) dx = - \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x) f'(x) dx =$$

$$= - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f'(x) dx = -f'(0)$$

Portanto:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x) f(x) dx = - f'(0)}$$

A derivada n-ésima $\delta^{(n)}(x)$ é definida de forma análoga. Repetindo os passos acima, lembrando que $f^{(k)}(x) \equiv 0$ para $x \notin (a,b)$ e $k = 0, 1, 2, \ldots$, segue que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(x) f(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(0)}$$

Podemos ainda nos perguntar pela primitiva da função delta, ou seja, uma distribuição $H(x)$ tal que

$$\delta(x) = H'(x)$$

A definição natural é:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(x) f(x) dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(x) f(x) dx$$

onde $\Phi_n(x)$ é uma primitiva de $\phi_n(x)$, por exemplo:

$$\Phi_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi_n(\xi) d\xi$$

Com isso e trocando a ordem de integração:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\int_{-\infty}^{x} d\xi \, \phi_n(\xi) \right] f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \left[\int_{\xi}^{+\infty} dx f(x) \right] \phi_n(\xi)$$

e com isso

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(x) f(x) dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(\xi) \left[\int_{\xi}^{+\infty} dx f(x) \right] d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi) \left[\int_{\xi}^{+\infty} dx f(x) \right] d\xi = \int_{0}^{\infty} dx f(x)$$

ou seja,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} H(x) f(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx}$$

de modo que

$$\boxed{H(x) = \begin{cases} 1 \ , & x > 0 \\ 0 \ , & x < 0 \end{cases}}$$

que é a chamada função escada ou de Heaviside.

Ex As seguintes sequências convergem (no sentido de $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) f(x) dx$) para a função escada:

i) $\Phi_n(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(-nx) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-nx}^{\infty} e^{-u^2} du$

ii) $\Phi_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si(nx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{nx} \frac{\sin u}{u} du$

iii) $\Phi_n(x) = e^{-e^{-nx}}$