II SÉRIES DE FOURIER GENERALIZADAS

II.1 O PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE (PSL)

Vamos recordar alguns fatos básicos sobre o PSL. Seja

$$\boxed{\mathcal{L}[y] = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)y}$$

O PSL consiste na equação diferencial

$$\boxed{\mathcal{L}[y] + \lambda\rho(x)y = 0 \quad , \ a \leq x \leq b}$$

com condições apropriadas conforme o problema seja regular ou singular. Uma solução y não-trivial é dita uma <u>auto-função</u> e a constante λ correspondente um <u>auto-valor</u>.

- <u>PSL REGULAR</u> $\Rightarrow$ $p(x) > 0$, $\rho(x) > 0$, p, p', q, ρ contínuas $(x \in [a,b])$

Nesse caso as condições adequadas são:

(A) CONDIÇÕES DE CONTORNO HOMOGÊNEAS $= \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}$

(B) CONDIÇÕES PERIÓDICAS $= \begin{cases} y(a) = y(b) \\ y'(a) = y'(b) \end{cases}$

• PSL SINGULAR $\Rightarrow$ duas possibilidades:

(I) $p(a)=0$ ou $\rho(a)=0$ e/ou $p(b)=0$ ou $\rho(b)=0$

(II) $-\infty < x < +\infty$
$0 \leq x < +\infty$
$-\infty < x \leq 0$

As condições adequadas são:

(C) y, y' LIMITADAS (para $x \to a$ ou $x \to b$ ou $x \to \pm\infty$ conforme o caso)

TEOREMA: As autofunções correspondentes a diferentes autovalores de um PSL regular com condições de contorno homogêneas ou periódicas são ortogonais com peso $\rho(x)$ em $[a,b]$, ou seja,

$$\int_a^b \rho(x)\, u(x)\, v(x)\, dx = 0 .$$

O mesmo vale para as autofunções de quadrado integrável de um PSL singular com a condição que estas autofunções e suas derivadas primeiras sejam limitadas nos extremos.

DEM: curso de MS410 ...

EX

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \quad , -\pi < x < \pi \\ y(-\pi) = y(\pi) \\ y'(-\pi) = y'(\pi) \end{cases}$$

Esse PSL tem autovalores $\lambda = n^2$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ e auto-funções $\{1, \cos nx, \sin nx\}$ $(n = 1, 2, \dots)$. Note que temos duas autofunções para o mesmo autovalor para $n = 1, 2, \dots$ Logo, os autovalores não são simples no caso periódico.

Denotando:

$$\phi_1(x) = 1, \quad \phi_{2n}(x) = \sin nx, \quad \phi_{2n+1}(x) = \cos nx \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

temos que o auto-valor correspondente a $\phi_k(x)$ é

$$\lambda_k = \left(\left[\frac{k}{2}\right] - 1\right)^2$$

onde $[a]$ denota a parte inteira de a.

A relação de ortogonalidade é:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \phi_n(x)\, \phi_m(x) = 0 \quad , n \neq m$$

ou seja, as autofunções são ortogonais com peso $p(x) = 1$.

//

EX

$$\begin{cases} [(1-x^2)y']' + \lambda y = 0 \quad , -1<x<1 \\ \lim\limits_{x\to\pm1} |y(x)| < +\infty \ , \ \lim\limits_{x\to\pm1} |y'(x)| < +\infty \end{cases}$$

Esse é um PSL singular cujos autovalores são $\lambda = n(n+1)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ e as correspondentes autofunções são os polinômios de Legendre $P_n(x)$ definidos por

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \qquad (n=1,2,\ldots)$$

e $P_0(x) = 1$. Logo:

$P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$, $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$, ...

//

II.2 EXPANSÕES ORTOGONAIS

Sejam $\{\phi_n(x)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ funções de quadrado integrável (com peso $\rho(x)$) em $[a,b]$,

$$\int_a^b dx\, \rho(x) [\phi_n(x)]^2 < +\infty$$

e ortogonais (com peso $\rho(x)$) para $n \neq m$,

$$\int_a^b dx\, \rho(x)\, \phi_n(x)\, \phi_m(x) = 0 \quad (n\neq m)$$

Vamos denotar por $\langle\ ,\ \rangle$ o produto escalar em $\mathcal{L}^2_\rho(a,b)$:

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b dx\,\rho(x)\,f(x)\,g(x)$$

Agora vamos supor que uma função $f(x)$ pode ser escrita como o limite de uma série uniformemente convergente de múltiplos de $\phi_n(x)$, ou seja:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\phi_n(x)}$$

Com isso temos que

$$\langle f,\phi_m\rangle = \int_a^b dx\,\rho(x)\,f(x)\,\phi_m(x) = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\phi_n(x)\right)\phi_m(x)\,\rho(x)\,dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b \phi_n(x)\,\phi_m(x)\,\rho(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\delta_{nm} \int_a^b [\phi_m(x)]^2 \rho(x)\,dx$$

$$= c_m \int_a^b [\phi_m(x)]^2 \rho(x)\,dx = c_m \langle\phi_m,\phi_m\rangle = c_m \|\phi_m\|^2$$

ou seja:

$$\boxed{c_n = \frac{\langle f,\phi_n\rangle}{\|\phi_n\|^2}}$$

EX Para a série de Fourier temos

$$\|\phi_1\|^2 = 2\pi \;, \quad \|\phi_k\|^2 = \pi \quad (k = 2, 3, \dots)$$

e portanto:

$$c_1 = \frac{\langle f, \phi_1 \rangle}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}$$

$$c_{2n} = \frac{\langle f, \phi_{2n} \rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx = b_n$$

$$c_{2n+1} = \frac{\langle f, \phi_{2n+1} \rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = a_n$$

//

Diremos que c_n é o <u>coeficiente de Fourier generalizado</u> da <u>série de Fourier generalizada</u> $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' c_n \phi_n(x)$.

Dada uma soma

$$s_N(x) = \sum_{n=1}^{N}{}' \gamma_n \phi_n(x),$$

o desvio total quadrático Δ_N:

$$\Delta_N = \| s_N - f \|^2 = \int_a^b dx\, p(x)\,[s_N(x) - f(x)]^2$$

é <u>minimizado</u> quando $\gamma_n = c_n$, ou seja $s_N = S_N$, que é a N-ésima soma parcial da série de Fourier generalizada. De fato:

$$\Delta_N = \langle s_N - f, s_N - f\rangle = \langle s_N, s_N\rangle - 2\langle s_N, f\rangle + \langle f, f\rangle$$

$$\langle s_N, s_N\rangle = \sum_{n=1}^{N}{}' \sum_{m=1}^{N}{}' \gamma_n \gamma_m \underbrace{\langle \phi_n, \phi_m\rangle}_{\delta_{nm}\|\phi_n\|^2} = \sum_{n=1}^{N}{}' \gamma_n^2 \|\phi_n\|^2$$

$$\langle s_N, f\rangle = \sum_{n=1}^{N}{}' \gamma_n \langle \phi_n, f\rangle$$

$$\therefore \frac{\partial \Delta_N}{\partial \gamma_K} = 2\gamma_K \|\phi_K\|^2 - 2\langle \phi_K, f\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_K = \frac{\langle \phi_K, f\rangle}{\|\phi_K\|^2} = c_K$$

Como $\Delta_N \geq 0$, para Δ_N^{min} temos

$$0 \leq \Delta_N^{min} = \sum_{n=1}^{N}{}' c_n^2 \|\phi_n\|^2 - 2\sum_{n=1}^{N}{}' c_n \langle \phi_n, f\rangle + \|f\|^2$$

$$= \sum_{n=1}^{N}{}' \frac{\langle \phi_n, f\rangle^2}{\|\phi_n\|^4} \|\phi_n\|^2 - 2\sum_{n=1}^{N}{}' \frac{\langle \phi_n, f\rangle^2}{\|\phi_n\|^2} + \|f\|^2$$

ou seja:

$$\sum_{n=1}^{N}{}' \frac{\langle \phi_n, f\rangle^2}{\|\phi_n\|^2} \leq \|f\|^2$$

e com os argumentos conhecidos para a série de Fourier segue a <u>desigualdade de Bessel generalizada</u>

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle \phi_n, f\rangle^2}{\|\phi_n\|^2} \leq \|f\|^2}$$

Dizemos que $S_N(x)$ <u>converge</u> <u>na</u> <u>média</u> para $f(x)$ se

$$\lim_{N\to\infty} \|S_N - f\|^2 = \lim_{N\to\infty} \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n - f \Big\|^2 = 0$$

e nesse caso dizemos que $\{\phi_n(x)\}$ é <u>completo</u>. Uma condição necessária e suficiente para isso é valer a <u>identidade</u> <u>de</u> <u>Parseval</u> <u>generalizada</u>

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle \phi_n, f\rangle^2}{\|\phi_n\|^2} = \|f\|^2}$$

ou ainda:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|\phi_n\|^2 = \|f\|^2}$$

II.3 POLINÔMIOS ORTOGONAIS

Seja $\{P_n(x)\}$ $(n=0,1,2\dots)$ uma sequência de polinômios tais que $P_n(x)$ seja de grau $\underline{\underline{n}}$ e que sejam ortogonais em $[a,b]$ para $n\neq m$,

$$\langle P_n, P_m\rangle = \int_a^b dx\, \rho(x)\, P_n(x)\, P_m(x) = 0 \qquad (n\neq m)$$

EX Vários polinômios ortogonais surgem como autofunções de PSL; alguns exemplos são:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)\,y + \lambda\rho(x)\,y = 0$$

polinômio $P_n(x)$	$p(x)$	$q(x)$	$\rho(x)$	λ	$[a,b]$
Legendre $P_n(x)$	$(1-x^2)$	0	1	$n(n+1)$	$-1\leq x\leq 1$
Chebyshev $T_n(x)$	$(1-x^2)^{1/2}$	0	$(1-x^2)^{-1/2}$	n^2	$-1\leq x\leq 1$
Hermite $H_n(x)$	e^{-x^2}	0	e^{-x^2}	$2n$	$-\infty < x < \infty$
Laguerre $L_n(x)$	xe^{-x}	0	e^{-x}	n	$0\leq x<\infty$

//

TEOREMA: Uma sequência de polinômios ortogonais em um intervalo finito $a \leq x \leq b$ é completa.

DEM: Seja $\{P_n(x)\}$ uma sequência de polinômios ortogonais tais que $P_n(x)$ é de grau n e seja $p_n(x)$ um polinômio de grau n arbitrário. Então existe c_n tal que $p_n(x) - c_n P_n(x)$ seja um polinômio de grau $n-1$. Da mesma forma, existe c_{n-1} tal que $(p_n(x) - c_n P_n(x)) - c_{n-1} P_{n-1}(x)$ seja um polinômio de grau $n-2$. Dessa forma podemos escrever

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' c_k P_k(x)$$

Mas, pelo teorema da aproximação de Weierstrass:

$$|f(x) - p_n(x)| < \varepsilon \quad \text{para} \quad a \leq x \leq b.$$

Logo:
$$\int_a^b [f(x) - p_n(x)]^2 \rho(x)\,dx < \varepsilon^2 \int_a^b \underbrace{\rho(x)}_{>0}\,dx < \varepsilon'$$

ou seja
$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=0}^{n}{}' c_k P_k \right\| = 0 ,$$

de modo que $\{P_n(x)\}$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ é completo.

✓

II.4 SÉRIE DE FOURIER-LEGENDRE

Uma série de Fourier-Legendre é uma série da forma $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$, onde $P_n(x)$ são os polinômios de Legendre, dados por $P_0(x) = 1$ e

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \quad , (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

que é chamada fórmula de Rodrigues.

➜ PROP: As seguintes relações e identidades são válidas:

(i) $P_n(x) = (-1)^n P_n(-x) \quad ; \quad P_n(1) = 1$

(ii) $P_n'(x) = x\, P_{n-1}'(x) + n\, P_{n-1}(x) \qquad (n \geq 1)$

(iii) $n\, P_n(x) = n x\, P_{n-1}(x) + (x^2-1)\, P_{n-1}'(x) \qquad (n \geq 1)$

(iv) $P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = (2n+1)\, P_n(x) \qquad (n \geq 1)$

(v) $\frac{d}{dx}\left[(1-x^2) P_n'(x)\right] + n(n+1)\, P_n(x) = 0$

(vi) $(n+1)\, P_{n+1}(x) = (2n+1)\, x\, P_n(x) - n\, P_{n-1}(x) \qquad (n \geq 1)$

(vii) $(1-x^2) P_n'^2 + n^2 P_n^2 = (1-x^2) P_{n-1}'^2 + n^2 P_{n-1}^2 \qquad (n \geq 1)$

(viii) $\frac{(1-x^2)}{n^2} P_n'^2 + P_n^2 \leq 1 \qquad (n \geq 1,\ |x| \leq 1)$

(ix) $|P_n(x)| \leq 1 \qquad (|x| \leq 1)$

(x) $\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x)\, dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}$

DEM: Apenas alguns casos:

• (ii) $P_n' = \frac{d}{dx} P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^2-1)^n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [n(x^2-1)^{n-1} 2x] =$

$$= \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \frac{d^n}{dx^n} [x(x^2-1)^{n-1}] = \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k(x)}{dx^k} \frac{d^{n-k}(x^2-1)^{n-1}}{dx^{n-k}} =$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \left[x \frac{d^n (x^2-1)^{n-1}}{dx^n} + n \frac{d^{n-1}(x^2-1)^{n-1}}{dx^{n-1}} \right] = x \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \frac{d^{n-1}(x^2-1)^{n-1}}{dx^{n-1}} \right] +$$

$$+ n \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \frac{d^{n-1}(x^2-1)^{n-1}}{dx^{n-1}} = x P_{n-1}' + n P_{n-1} \quad \checkmark$$

• (iii) $P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)(x^2-1)^{n-1}] = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k(x^2-1)}{dx^k} \frac{d^{n-k}(x^2-1)^{n-1}}{dx^{n-k}} =$

$$= \frac{1}{2^n n!} \left[(x^2-1) \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^{n-1} + n\, 2x \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2-1)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \frac{d^{n-2}(x^2-1)^{n-1}}{dx^{n-2}} \right]$$

$$= \frac{(x^2-1)}{2n} P_{n-1}' + x P_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2^n n!} \frac{d^{n-2}(x^2-1)^{n-1}}{dx^{n-2}} \quad (\Delta)$$

$$P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \frac{d}{dx} (x^2-1)^n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [n\, 2x (x^2-1)^{n-1}] =$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{d^k(x)}{dx^k} \frac{d^{n-k}(x^2-1)^{n-1}}{dx^{n-k}} = \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \frac{x\, d^{n-1}(x^2-1)^{n-1}}{dx^{n-1}} +$$

$$+ \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \frac{(n-1)\, d^{n-2}(x^2-1)^{n-1}}{dx^{n-2}} = x P_{n-1} + 2 \frac{n(n-1)}{2^n n!} \frac{d^{n-2}(x^2-1)^{n-1}}{dx^{n-2}} \quad (\Delta\Delta)$$

$$(\Delta)+(\Delta\Delta) \Rightarrow 2P_n - \frac{(x^2-1)}{n} P_{n-1}' - 2x P_{n-1} = P_n - x P_{n-1}$$

$$\therefore \quad P_n = x P_{n-1} + \frac{(x^2-1)}{n} P_{n-1}' \quad \checkmark$$

• (vi)

(iii) → (ii) $$\frac{(n+1)P_{n+1}-(n+1)xP_n}{x^2-1} = x\left[\frac{nP_n - nxP_{n-1}}{x^2-1}\right] + nP_{n-1}$$

$$(n+1)P_{n+1} - (n+1)xP_n = nxP_n - nx^2P_{n-1} + n(x^2-1)P_{n-1}$$

$$\therefore\ (n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1} \quad \checkmark$$

• (vii)

$[(ii)]^2 \Rightarrow$ $$P_n'^2 = x^2P_{n-1}'^2 + n^2P_{n-1}^2 + 2nxP_{n-1}'P_{n-1}$$

$[(iii)]^2 \Rightarrow$ $$n^2P_n^2 = n^2x^2P_{n-1}^2 + (x^2-1)^2P_{n-1}'^2 + 2nx(x^2-1)P_{n-1}P_{n-1}'$$

$[(iii)]^2 - (x^2-1)[(ii)]^2 \Rightarrow$ $$n^2P_n^2 - (x^2-1)P_n'^2 =$$
$$= n^2x^2P_{n-1}^2 + (x^2-1)^2P_{n-1}'^2 - x^2(x^2-1)P_{n-1}'^2 - n^2(x^2-1)P_{n-1}^2$$
$$= n^2P_{n-1}^2 + (x^2-1)(x^2-1-x^2)P_{n-1}'^2$$

$$\therefore\ P_n^2 + \frac{(1-x^2)}{n^2}P_n'^2 = P_{n-1}^2 + \frac{(1-x^2)}{n^2}P_{n-1}'^2 \quad \checkmark$$

• (viii)

$$P_{n-1}^2 + \frac{(1-x^2)}{n^2}P_{n-1}^2 \le P_{n-1}^2 + \frac{(1-x^2)}{(n-1)^2}P_{n-1}^2 \overset{(vii)}{=} P_{n-2}^2 + \frac{(1-x^2)}{(n-1)^2}P_{n-2}'^2 \le$$
$$\le P_{n-2}^2 + \frac{(1-x^2)}{(n-2)^2}P_{n-2}'^2 = P_{n-3}^2 + \frac{(1-x^2)}{(n-3)^2}P_{n-3}^2 \le \dots$$

$$\therefore\ P_n^2 + \frac{(1-x^2)}{n^2}P_n'^2 \le \dots \le P_{n-k}^2 + \frac{(1-x^2)}{(n-k+1)^2}P_{n-k}'^2 \le \dots \le P_0^2 + \frac{(1-x^2)}{1^2}P_0'^2$$

$P_0(x) = 1 \Rightarrow P_0'(x) = 0$ $$\therefore\ P_n^2 + \frac{(1-x^2)}{n^2}P_n'^2 \le 1 \quad \checkmark$$

• (ix)

$$|P_n| = \sqrt{P_n^2} \underset{|x|\le 1}{\le} \sqrt{P_n^2 + \frac{(1-x^2)}{n^2} P_n'^2} \le 1 \qquad \therefore \quad |P_n(x)| \le 1$$

✓

• (x)

$$\langle P_n, P_n \rangle = \left\langle \frac{(2(n-1)+1)}{n} x P_{n-1} - \frac{(n-1)}{n} P_{n-2} \, , \, P_n \right\rangle$$

$$= \frac{(2n-1)}{n} \langle x P_{n-1}, P_n \rangle - \frac{(n-1)}{n} \underbrace{\langle P_{n-2}, P_n \rangle}_{=0}$$

$$= \frac{(2n-1)}{n} \langle P_{n-1}, x P_n \rangle = \frac{(2n-1)}{n} \left\langle P_{n-1}, \frac{n+1}{2n+1} P_{n+1} + \frac{n}{2n+1} P_{n-1} \right\rangle$$

$$= \frac{(2n-1)}{n} \cdot \frac{(n+1)}{(2n+1)} \underbrace{\langle P_{n-1}, P_{n+1} \rangle}_{=0} + \frac{(2n-1)}{n} \frac{n}{(2n+1)} \langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle$$

$$\therefore \quad \langle P_n, P_n \rangle = \frac{2n-1}{2n+1} \langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle$$

$$= \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right) \cdot \left(\frac{2(n-1)-1}{2(n-1)+1}\right) \langle P_{n-2}, P_{n-2} \rangle$$

$$= \left(\frac{2n-3}{2n+1}\right) \left(\frac{2(n-2)-1}{2(n-2)+1}\right) \langle P_{n-3}, P_{n-3} \rangle$$

$$= \left(\frac{2n-5}{2n+1}\right) \langle P_{n-3}, P_{n-3} \rangle = \frac{2(n-3)+1}{2n+1} \langle P_{n-3}, P_{n-3} \rangle$$

$$= \dots = \frac{2+1}{2n+1} \langle P_1, P_1 \rangle = \frac{1}{2n+1} \langle P_0, P_0 \rangle$$

$$\therefore \langle P_n, P_n \rangle = \frac{1}{2n+1} \int_{-1}^{+1} P_0^2(x)\,dx = \frac{1}{2n+1} \int_{-1}^{+1} dx = \frac{2}{2n+1}$$

✓

EX Fourier-Legendre para $f(x)=x^2$

$$x^2=\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \Rightarrow \langle x^2, P_m\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \underbrace{\langle P_n, P_m\rangle}_{\frac{2}{2n+1}\delta_{nm}} = c_m \cdot \frac{2}{2m+1}$$

$$\therefore c_m = \frac{2m+1}{2}\langle x^2, P_m\rangle = \frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{+1} dx\, x^2 P_m(x)$$

$$\langle x^2, P_m\rangle \overset{(ii)}{=} \left\langle x^2, \frac{P_{m+1}'}{m+1} - \frac{x P_m'}{m+1}\right\rangle = \frac{1}{m+1}\langle x^2, P_{m+1}'\rangle - \frac{1}{m+1}\langle x^3, P_m'\rangle =$$

$$= \frac{1}{m+1}\left[x^2 P_{m+1}\Big|_{-1}^{+1} - 2\langle x, P_{m+1}\rangle\right] - \frac{1}{m+1}\left[x^3 P_m\Big|_{-1}^{+1} - 3\langle x^2, P_m\rangle\right] =$$

$$= \frac{1}{m+1}\Big[\underbrace{P_{m+1}(1)}_{1} - \underbrace{P_{m+1}(-1)}_{(-1)^{m+1}} - 2\langle x, P_{m+1}\rangle\Big] - \frac{1}{m+1}\Big[\underbrace{P_{m+1}(1)}_{1} + \underbrace{P_m(-1)}_{(-1)^m} - 3\langle x^2, P_m\rangle\Big]$$

$$= \frac{1}{m+1}\left[\cancel{1} - \cancel{(-1)^{m+1}} - \cancel{1} - \cancel{(-1)^m}\right] - \frac{2}{m+1}\langle x, P_{m+1}\rangle + \frac{3}{m+1}\langle x^2, P_m\rangle$$

$$\left(\frac{3}{m+1} - 1\right)\langle x^2, P_m\rangle = \frac{2}{m+1}\langle x, P_{m+1}\rangle$$

$$(2-m)\langle x^2, P_m\rangle = 2\langle x, P_{m+1}\rangle$$

Mas: $P_1(x) = x \Rightarrow (2-m)\langle x^2, P_m\rangle = 2\langle P_1, P_{m+1}\rangle$

$$\therefore\ m=0 \Rightarrow 2\langle x^2, P_0\rangle = 2\langle P_1, P_1\rangle = 2\,\frac{2}{2\cdot 1+1} = \frac{4}{3}$$

$$m\neq 0 \Rightarrow (2-m)\langle x^2, P_m\rangle = 0 \Rightarrow \begin{cases} \langle x^2, P_m\rangle = 0, & m\neq 2 \\ \langle x^2, P_2\rangle = ? \end{cases}$$

$(vi) \Rightarrow \quad 2P_2 = 3xP_1 - P_0 = 3x^2 - 1$

$$\langle x^2, P_2 \rangle = \int_{-1}^{+1} dx\, x^2 \frac{1}{2}(3x^2-1) = \frac{3}{2}\frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{+1} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{+1} = \frac{4}{15}$$

$$\therefore \quad \langle x^2, P_0 \rangle = \frac{2}{3}$$

$$\langle x^2, P_2 \rangle = \frac{4}{15}$$

$$\langle x^2, P_m \rangle = 0 \;, \quad m \neq 0,2$$

Logo:

$$C_0 = \frac{1}{2}\langle x^2, P_0 \rangle = \frac{1}{3}$$

$$C_2 = \frac{2\cdot 2+1}{2}\langle x^2, P_2 \rangle = \frac{5}{2}\cdot\frac{4}{15} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad x^2 = \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_2(x)$$

De fato:

$P_0(x) = 1$

$P_1(x) = x$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$

$$\therefore \quad \frac{1}{3}P_0 + \frac{2}{3}P_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$= \frac{1}{3} + x^2 - \frac{1}{3} = x^2$$

//