I.7 MÉTODO DE FEJÉR

DEF: Dados as somas parciais $S_K(x) = \sum_{i=0}^{K} u_i(x)$ $(K = 0, 1, \ldots, N-1)$, a <u>soma de Cesàro</u> (ou média C-1) é definida como a média aritmética dessas somas parciais:

$$\boxed{\sigma_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} S_K(x)}$$

Dizemos que uma série é C-1 somável se existir o limite $\lim_{N \to \infty} \sigma_N(x)$.

• <u>OBS</u>: Podemos definir a média C-2, etc, como a média aritmética das somas de Cesàro, ou seja,

$$\sigma_N^{(2)}(x) = \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} \sigma_N(x),$$

e dizer que a série é C-2 somável se existir $\lim_{N \to \infty} \sigma_N^{(2)}(x)$.

EX $S_K(x) = \sum_{i=0}^{K-1} (-1)^i$

$S_0 = 1$	$S_0 = 1$
$S_1 = 1 - 1 = 0$	$S_0 + S_1 = 1$
$S_2 = 1 - 1 + 1 = 1$	$S_0 + S_1 + S_2 = 2$
$\vdots$	$S_0 + S_1 + S_2 + S_3 = 2$
	$\vdots$

$\sigma_0 = \frac{1}{1} \cdot 1 = 1$, $\sigma_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

$\sigma_2 = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$, $\sigma_2 = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$

$\sigma_4 = \frac{1}{5} \cdot 3 = \frac{3}{5}$, $\sigma_5 = \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{1}{2}$

$\vdots$ $\vdots$

$\sigma_{2n} = \frac{n+1}{2n+1}$ $\sigma_{2n+1} = \frac{1}{2}$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sigma_{2n+1} &= \frac{1}{2} \\ \lim_{n\to\infty} \sigma_{2n} &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \therefore$$ a série $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i$ é C-1-somável e o resultado é $\frac{1}{2}$ //

! FEJÉR $\Rightarrow$ USAR A SOMA DE CESÀRO DA SÉRIE DE FOURIER !!

$$\sigma_1 = \frac{a_0}{2}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{a_0}{2} + \left[\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x)\right]\right]$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{3}\left[\frac{a_0}{2} + \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{1}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right] + \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{2}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right]\right]$$

$\vdots$

$$\sigma_N = \frac{1}{N}\left[\frac{a_0}{2} + \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{1}{}'(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right]\right.$$

$$+ \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{2}{}'(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right] + \dots +$$

$$\left. + \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N-1}{}'(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right]\right]$$

$$= \left(\frac{N}{N}\right)\left(\frac{a_0}{2}\right) + \left(\frac{N-1}{N}\right)(a_1 \cos x + b_1 \sin x) +$$

$$+ \left(\frac{N-2}{N}\right)(a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots +$$

$$+ \left(\frac{N-(N-1)}{N}\right)\left(a_{N-1} \cos (N-1)x + b_{N-1} \sin (N-1)x\right)$$

$\therefore$

$$\boxed{\sigma_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N-1}{}'(\alpha_k^N \cos kx + \beta_k^N \sin kx)}$$

$$\boxed{\alpha_k^N = \left(1 - \frac{k}{N}\right) a_k} \qquad \boxed{\beta_k^N = \left(1 - \frac{k}{N}\right) b_k}$$

Por outro lado, sabemos que

$$S_N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} d\xi\, f(\xi)\, D_N(\xi - x)$$

onde D_N denota o núcleo de Dirichlet. Logo:

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{K=0}^{N-1} \int_{-\pi}^{\pi} d\xi\, f(\xi)\, D_K(\xi - x)$$

ou ainda:

$$\boxed{\sigma_N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} d\xi\, f(\xi)\, F_N(\xi - x)}$$

onde

$$\boxed{F_N(u) = \frac{1}{N}\sum_{K=0}^{N-1} D_K(u)}$$

Lembrando que $D_K(u) = \dfrac{\sin(K+1/2)u}{2\pi \sin(\frac{u}{2})}$, temos

$$\sin^2\frac{u}{2}\; F_N(u) = \frac{1}{N}\sin^2\frac{u}{2}\sum_{K=0}^{N-1}\frac{\sin(K+1/2)u}{2\pi \sin\frac{u}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi N}\sum_{K=0}^{N-1} \sin\frac{u}{2}\cdot \sin\left(K+\frac{1}{2}\right)u$$

$$= \frac{1}{2\pi N}\sum_{K=0}^{N-1}\frac{1}{2}\left[\cos\left(K+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)u - \cos\left(K+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)u\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi N} \sum_{K=0}^{N-1} \left(\cos Ku - \cos(K+1)u \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi N} \left(1 - \cancel{\cos u} + \cancel{\cos u} - \cancel{\cos 2u} + \dots + \cancel{\cos(N-1)u} - \cos Nu \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi N} (1 - \cos Nu) = \frac{1}{2\pi N} \left(\frac{1 - \cos Nu}{2} \right) = \frac{1}{2\pi N} \sin^2 \frac{Nu}{2}$$

2 → DEF: O núcleo de Fejér $F_N(u)$ é definido como

$$\boxed{F_N(u) = \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} D_K(u) = \frac{\sin^2(Nu/2)}{2\pi N \sin^2(u/2)}}$$

Antes de prosseguir, é importante notarmos que

• LEMA: $\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} D_K(u)\,du = 1}$ $\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} F_K(u)\,du = 1}$

DEM: $D_K(u) = \frac{\sin(K+1/2)u}{2\pi \sin(u/2)} = \left(1 + 2 \sum_{j=1}^{K-1} \cos ju \right) \frac{1}{2\pi}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_K(u)\,du = \frac{1}{2\pi} \left[\pi - (-\pi) + 2 \sum_{j=1}^{K-1} \cancelto{0}{\frac{\sin ju}{j} \Big|_{-\pi}^{\pi}} \right] = 1$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_K(u)\,du = \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} \int_{-\pi}^{\pi} D_j(u)\,du = \frac{1}{K} \cdot K = 1$$

✓

TEOREMA (FEJÉR): Seja $f(x)$ uma função contínua e periódica (de período 2π) e seja $\sigma_N(x)$ a soma de Cesàro da série de Fourier de $f(x)$, ou seja,

$$\sigma_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{K=1}^{N-1} \left(\alpha_K^N \cos Kx + \beta_K^N \sin Kx\right),$$

onde $\alpha_K^N = (1-K/N)\,a_K$, $\beta_K^N = (1-K/N)\,b_K$. Então a sequência de funções $\sigma_N(x)$ converge para $f(x)$.

DEM: (mais fácil que Fourier pois $F_N(u) \geq 0$)

$$\sigma_N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} d\xi\, f(\xi)\, F_N(\xi - x) = \int_{a-\pi}^{a+\pi} d\xi\, f(\xi)\, F_N(\xi - x)$$

$$\overset{x=a}{=} \int_{x-\pi}^{x+\pi} d\xi\, f(\xi)\, F_N(\xi - x) \overset{\xi - x = u}{=} \int_{-\pi}^{\pi} du\, f(x+u)\, F_N(u)$$

$$\sigma_N(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} du\, f(x+u)\, F_N(u) - f(x) \int_{-\pi}^{\pi} du\, F_N(u)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} du\, [f(x+u) - f(x)]\, F_N(u)$$

$$= \frac{1}{\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} du\, [f(x+u) - f(x)]\, \frac{\sin^2 Nu/2}{2 \sin^2 u/2}$$

f contínua $\Rightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0$ tal que

$$|f(x+u)-f(x)|<\varepsilon \quad \text{para } |x+u-x|=|u|<\delta$$

$$|\sigma_N(x)-f(x)| = \left|\int_{-\pi}^{\pi}(\ldots)\right| = \left|\int_{-\pi}^{-\delta}(\ldots)+\int_{-\delta}^{\delta}(\ldots)+\int_{\delta}^{\pi}(\ldots)\right|$$

$$\leq \underbrace{\left|\int_{-\pi}^{-\delta}(\ldots)\right|}_{|I_1|}+\underbrace{\left|\int_{-\delta}^{\delta}(\ldots)\right|}_{|I_2|}+\underbrace{\left|\int_{\delta}^{\pi}(\ldots)\right|}_{|I_3|}$$

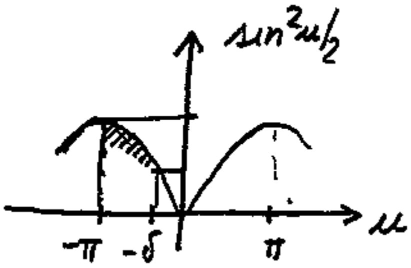
$$|I_2| \leq \int_{-\delta}^{\delta}\underbrace{|f(x+u)-f(x)|}_{<\varepsilon \text{ para } -\delta<u<\delta}F_N(u)\,du \;<\varepsilon\int_{-\delta}^{\delta}\underbrace{F_N(u)}_{\geq 0}du$$

$$<\varepsilon\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}F_N(u)\,du}_{=1} \qquad \therefore\ |I_2|<\varepsilon$$

$$|I_1| \leq \frac{1}{\pi N}\int_{-\pi}^{-\delta}du\,|f(x+u)-f(x)|\,\frac{\sin^2 Nu/2}{2\sin^2 u/2}$$

$$\leq \frac{2M}{\pi N}\int_{-\pi}^{-\delta}du\,\frac{\sin^2 Nu/2}{2\sin^2 u/2} \qquad (M=\text{máx}\,|f(x)|)$$

$$\leq \frac{2M}{\pi N}\int_{-\pi}^{-\delta}du\,\frac{1}{2\sin^2 u/2}$$



$$\sin^2\frac{\pi}{2} \geq \sin^2\frac{u}{2} \geq \sin^2\frac{\delta}{2}$$

$$\frac{1}{\sin^2\frac{u}{2}} \leq \frac{1}{\sin^2\delta/2} \qquad (-\pi \leq u \leq -\delta)$$

$$\therefore \quad |I_1| \leq \frac{2M}{\pi N}\int_{-\pi}^{-\delta} du \, \frac{1}{2\sin^2\delta/2} = \frac{M}{\pi N \sin^2\delta/2}\underbrace{\int_{-\pi}^{-\delta} du}_{\pi-\delta \,<\, \pi}$$

$$\leq \frac{M\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}N\sin^2\delta/2} \qquad \therefore \; |I_1| \leq \frac{M}{N\sin^2\delta/2}$$

Analogamente: $|I_3| \leq \dfrac{M}{N\sin^2\delta/2}$

$$\therefore \; |\sigma_N(x) - f(x)| \leq \epsilon + \frac{2M}{N\sin^2\delta/2}$$

$$\lim_{N\to\infty} |\sigma_N(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

$$\therefore \; \lim_{N\to\infty} \sigma_N(x) = f(x)$$

(I.8) DIFERENCIAÇÃO E INTEGRAÇÃO

TEOREMA: Seja $f(x)$ uma função contínua em $[-\pi, \pi]$ tal que $f(-\pi) = f(\pi)$ e seja $f'(x)$ contínua por partes e com derivadas laterais nesse intervalo. Então a série de Fourier de $f(x)$ é diferenciável e

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,(-a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$

DEM: Como $f'(x)$ satisfaz as condições do teorema de Fourier (pg. 19), ela possui a série de Fourier

$$f'(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

Mas:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[f(\pi) - f(-\pi)\right] = 0$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\Big[\underbrace{f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + n\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)\sin nx\Big] = n b_n$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\Big[\overset{0}{\cancel{f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}}} - n\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)\cos nx\Big] = -n a_n$$

de modo que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n b_n \cos nx - n a_n \sin nx)$$

• <u>OBS</u>: Note que o teorema fornece apenas uma condição suficiente. Além disso, podemos ter série de Fourier para $f(x)$ e <u>NÃO</u> para $f'(x)$ (nesse caso o termo $\underline{\underline{n}}$ no numerador diminui a taxa de convergência da série!)

$\boxed{EX}$ A função $f(x) = x$ possui a série de Fourier

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$$

Porém $f(-\pi) = -\pi \neq \pi = f(\pi)$, de modo que as condições do teorema não são satisfeitas e nada podemos afirmar acerca da série de Fourier de $f'(x)$ usando esse teorema. Note nesse caso que a derivada da série de Fourier não converge!

$$1 \neq \underbrace{2 \sum_{n=1}^{\infty}{}' (-1)^{n+1} \cos nx}_{\text{não converge}}$$

• <u>OBS</u>: Dentro das condições do teorema anterior, uma vez que $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$ (critério do termo geral), temos

$$\lim_{n\to\infty} n\, a_n = 0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} n\, b_n = 0$$

Note que a série do exemplo acima não satisfaz essas condições.

☞ TEOREMA: Seja $f(x)$ uma função contínua por partes em $(-\pi,\pi)$. Então, independentemente da série de Fourier de $f(x)$ convergir ou não, vale a seguinte igualdade:

$$\int_{-\pi}^{x} f(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}a_0(x+\pi) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Big[a_n \sin nx - b_n(\cos nx - \cos n\pi)\Big]$$

quando $x \in [-\pi,\pi]$.

DEM: Seja

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(\xi)\,d\xi - \frac{a_0}{2}x$$

Se $f(x)$ é contínua por partes então $F(x)$ é contínua. Além disso $F'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$, de modo que $F'(x)$ é contínua por partes. Podemos ainda notar que $F(-\pi) = -\frac{a_0}{2}(-\pi) = \frac{\pi a_0}{2}$ e

$$F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\,d\xi - \frac{a_0}{2}\pi = a_0\pi - \frac{a_0}{2}\pi = \frac{a_0\pi}{2}$$

ou seja, $F(\pi) = F(-\pi)$. Temos com isso que $F(x)$ satisfaz as condições do teorema de Fourier e possui portanto a série de Fourier

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, F(x) \cos nx \quad , \quad B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, F(x) \sin nx$$

Para $n \neq 0$:

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \left[\int_{-\pi}^{x} f(\xi) d\xi - \frac{a_0}{2} x \right] \cos nx$$

$$= \frac{1}{\pi} F(x) \cancel{\frac{\sin nx}{n}}^{\,0} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{\sin nx}{n} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} \right]$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x) \sin nx + \frac{a_0}{2n\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} dx \sin nx}_{=0}$$

$$= -\frac{1}{n} b_n$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \left[\int_{-\pi}^{x} f(\xi) d\xi - \frac{a_0 x}{2} \right] \sin nx$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{\pi} F(x) \frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi}}_{\frac{-1}{n\pi}\underbrace{\left[F(\pi) \cos n\pi - F(-\pi) \cos n(-\pi)\right]}_{\underbrace{[F(\pi) - F(-\pi)]}_{=0} \cos n\pi}} + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos nx \left[f(x) - \frac{a_0}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos nx\, f(x) - \frac{a_0}{2n\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos nx}_{=0} = \frac{1}{n} a_n$$

$$\therefore F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{b_n}{n}\cos nx + \frac{a_n}{n}\sin nx\right)$$

Tomando $x=\pi$:

$$F(\pi) = \frac{a_0\pi}{2} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{b_n}{n}\cos n\pi + \frac{a_n}{n}\underbrace{\sin n\pi}_{=0}\right)$$

$$\therefore \frac{A_0}{2} = \frac{a_0\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}\cos n\pi$$

de modo que

$$\int_{-\pi}^{x} f(\xi)\,d\xi - \frac{a_0 x}{2} = \frac{a_0\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[a_n\sin nx - b_n(\cos nx - \cos n\pi)\right]$$

✓

OBS: Note que no caso da integração o termo n no denominador aumenta a taxa de convergência.

EX: A série de $f(x)=x$ é

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$$

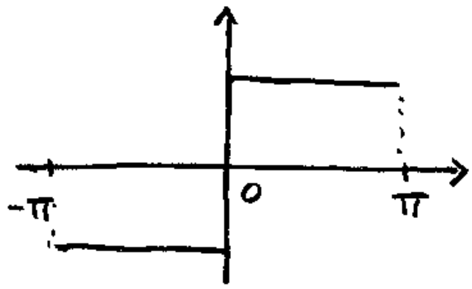
Tomando $\int_0^x f(\xi)d\xi$ temos

$$x^2 = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

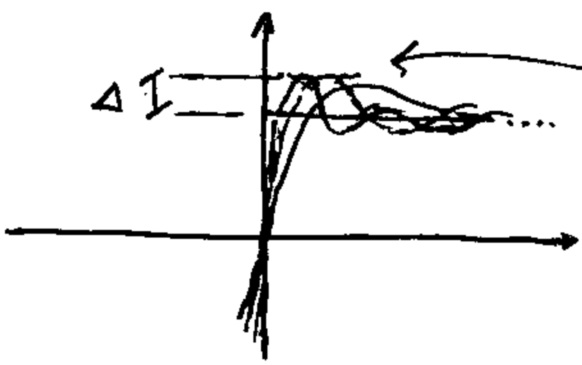
que é justamente a série obtida na pag. 3 uma vez que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

(I.9) FENÔMENO DE GIBBS

Para ilustrar o fenômeno de Gibbs, vamos considerar uma onda quadrada periódica



$$f(x) = \begin{cases} \frac{h}{2}, & 0<x<\pi \\ -\frac{h}{2}, & -\pi<x<0 \end{cases}$$



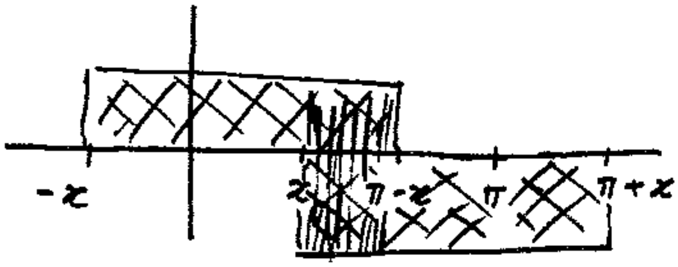
$\Delta = ?$

$$S_N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} d\xi\, f(\xi)\, D_N(\xi - x) = \int_{-\pi}^{\pi} d\xi\, f(\xi) \frac{\sin(N+1/2)(\xi-x)}{2\pi \sin(\xi-x)/2}$$

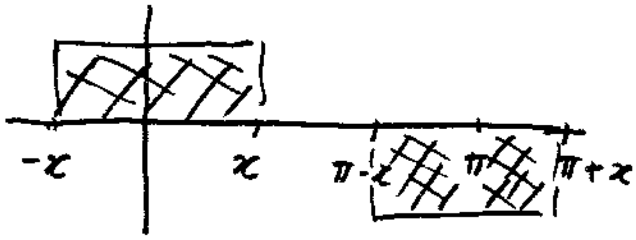
$$= -\frac{h}{4\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{0} d\xi \frac{\sin(N+1/2)(\xi-x)}{\sin(\xi-x)/2}}_{+\int_{0}^{\pi} d\xi \frac{\sin(N+1/2)(\xi+x)}{\sin(\xi+x)/2}} + \frac{h}{4\pi} \int_{0}^{\pi} d\xi \frac{\sin(N+1/2)(\xi-x)}{\sin(\xi-x)/2}$$

$$S_N(x) = \frac{h}{4\pi}\int_0^{\pi} d\xi \, \frac{\sin(N+1/2)(\xi - x)}{\sin(\xi - x)/2} - \frac{h}{4\pi}\int_0^{\pi} d\xi \, \frac{\sin(N+1/2)(\xi + x)}{\sin(\xi + x)/2}$$

$$= \frac{h}{4\pi}\int_{-x}^{\pi - x} du \, \frac{\sin(N+1/2)u}{\sin u/2} - \frac{h}{4\pi}\int_{x}^{\pi + x} du \, \frac{\sin(N+1/2)u}{\sin u/2}$$



as integrais se cancelam



$$S_N(x) = \underbrace{\frac{h}{4\pi}\int_{-x}^{x} du \, \frac{\sin(N+1/2)u}{\sin u/2}}_{S_1(x)} - \underbrace{\frac{h}{4\pi}\int_{\pi - x}^{\pi + x} du \, \frac{\sin(N+1/2)u}{\sin u/2}}_{S_2(x)}$$

Na vizinhança da descontinuidade $(x = 0)$

$$\lim_{x \to 0} S_2(x) = \lim_{x \to 0} \int_{\pi - x}^{\pi + x} (\cdots) \simeq \int_{\pi}^{\pi} (\cdots) \simeq \frac{\sin(N+1/2)\pi}{\sin \pi/2} \underbrace{(\pi - \pi)}_{=0} \simeq 0$$

Porém, o mesmo não vale para $S_1(x)$ devido à descontinuidade do integrando $(\sin 0 = 0)$.

$$S_N(x) \simeq \frac{h}{4\pi}\int_{-x}^{x} \frac{\sin(N+1/2)u}{\sin u/2}\,du = \frac{h}{2\pi}\int_0^x \frac{\sin(N+1/2)u}{\sin u/2}\,du$$

$$(N+1/2)u = t \qquad \therefore\ S_N(x) \simeq \frac{h}{2\pi}\int_0^{(N+1/2)x} dt\,\frac{\sin t}{(N+1/2)\sin\frac{t}{2(N+1/2)}}$$

O integrando é positivo até $t = (N+\frac{1}{2})x = \pi$; depois desse valor o integrando é negativo. Logo, o maior valor de $S_N(x)$ é para $t_{max} = (N+1/2)X_{max} = \pi$

$$\therefore\ X_{max} = \frac{\pi}{(N+1/2)} \simeq \frac{\pi}{N}$$

$$\therefore\ S_N^{max} = \frac{h}{2\pi}\int_0^{\pi} dt\,\frac{\sin t}{(N+1/2)\sin\frac{t}{2(N+1/2)}} = \frac{h}{2\pi}\int_0^{\pi} dt\,\frac{\sin t}{t/2}\cdot\frac{t}{2(N+1/2)}\cdot\frac{1}{\sin\frac{t}{2(N+1/2)}}$$

$$\therefore\ N\to\infty \qquad \therefore\ S^{max} \simeq \frac{h}{\pi}\int_0^{\pi} dt\,\frac{\sin t}{t}$$

$$\simeq \frac{h}{2}\underbrace{\left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} dt\,\frac{\sin t}{t}\right]}_{\parallel}$$

$\parallel \leftarrow$ expansão + integração termo a termo

$$\simeq 1.1789797$$

$$\therefore\ S^{max} \simeq \frac{h}{2}\underbrace{(1.1789797)}$$

é maior do que $\frac{h}{2}$ por cerca de 18%

$$\therefore\ \boxed{\Delta \simeq 18\%}$$

<u>OBS</u>: o número de termos na soma parcial não muda Δ mas apenas desloca o ponto de máximo (ou mínimo)!

I.10 TEOREMA DA APROXIMAÇÃO DE WEIERSTRASS

TEOREMA (WEIERSTRASS): Seja $f(x)$ contínua em $a \leq x \leq b$. Então para todo $\epsilon > 0$ existe um polinômio $P(x)$ tal que $|P(x) - f(x)| < \epsilon$, $\forall x \in [a,b]$.

DEM: Dado $f(x)$, $x \in [a,b]$, podemos definir $g(t)$ para $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ através de

$$g(t) = f\left[\left(\frac{b-a}{\pi}\right)t + \left(\frac{b-a}{2}\right)\right]$$

Podemos ainda definir uma extensão de $g(t)$ para $x \in [-\pi, \pi]$, que denotaremos por $G(t)$, e de modo que $G(-\pi) = G(\pi)$. Podemos além disso considerar para os demais pontos a extensão periódica de $G(t)$. Nessas condições, o teorema de Fejér (pg. 55) nos garante que a sequência $\sigma_N(t)$,

$$\sigma_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} (\alpha_k^N \cos kt + \beta_k^N \sin kt),$$

converge para $G(t)$, ou seja, $\forall \epsilon > 0$, existe $N_0 > 0$ tal que

$$|\sigma_N(t) - G(t)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{para } N > N_0.$$

Por outro lado, pelo teorema de Taylor, existem polinômios $R_n^k(t)$ e $S_n^k(t)$ de grau n tais que

$$|\cos Kt - R_n^K(t)| < \varepsilon' \quad , \quad |\sin Kt - S_n^K(t)| < \varepsilon'' ,$$

para $n > N_1$. Portanto, existe um polinômio $Q_N(t)$, que é uma combinação dos polinômios $R_n^K(t)$ e $S_n^K(t)$, tal que

$$|\sigma_N(t) - Q_N(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Com isso:

$$\begin{aligned} |G(t) - Q_N(t)| &= |G(t) - \sigma_N(t) + \sigma_N(t) - Q_N(t)| \\ &\leq \underbrace{|G(t) - \sigma_N(t)|}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{|\sigma_N(t) - Q_N(t)|}_{< \varepsilon/2} \end{aligned}$$

$$|G(t) - Q_N(t)| < \varepsilon \quad \text{para } t \in [-\pi, \pi]$$

$$|g(t) - Q_N(t)| < \varepsilon \quad \text{para } t \in [-\pi/2, \pi/2]$$

ou, definindo $P_N(x) = Q_N\left[\left(\frac{\pi}{b-a}\right)x - \frac{\pi}{2}\left(\frac{b+a}{b-a}\right)\right]$,

$$|f(x) - P_N(x)| < \varepsilon \quad \text{para } x \in [a, b]$$