I.6 CONVERGÊNCIA NA MÉDIA

Da expressão para o produto escalar em $\mathcal{L}^2(a,b)$ definimos uma norma através de

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Com isso, dadas as funções $f, g \in \mathcal{L}^2(a,b)$, definimos o desvio total quadrático dessas funções como

$$\Delta = \|f - g\|^2 = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$$

TEOREMA: Seja o polinômio trigonométrico

$$\phi_N(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (A_n \cos nx + B_n \sin nx),$$

onde A_0, A_n e B_n são indeterminados e $f(x)$ é uma função contínua por partes em $[-\pi, \pi]$. Então o desvio total quadrático $\Delta_N = \|f - \phi_N\|^2$ é minimizado quando os coeficientes A_0, A_n e B_n forem iguais aos coeficientes de Fourier de $f(x)$.

DEM:

$$\Delta_N = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - \phi_N(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{A_0}{2} - \sum_{n=1}^{N} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)\right]^2 dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{N}{}' \sum_{m=1}^{N}{}' A_n A_m \cos nx \cos mx \, dx$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{N}{}' \sum_{m=1}^{N} B_n B_m \sin nx \sin mx \, dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{A_0}{2} dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sum_{n=1}^{N}{}' A_n \cos nx \, dx$$

$$- 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sum_{n=1}^{N} B_n \sin nx \, dx + 2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{A_0}{2} \sum_{n=1}^{N}{}' A_n \cos nx \, dx + 2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{A_0}{2} \sum_{n=1}^{N}{}' B_n \sin nx \, dx$$

$$+ 2\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{N}{}' \sum_{m=1}^{N}{}' A_n B_m \cos nx \sin mx \, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx + \frac{A_0^2}{4} \cdot 2\pi + \sum_{n=1}^{N}{}' \sum_{m=1}^{N}{}' A_n A_m \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx}_{\pi \delta_{nm}}$$

$$+ \sum_{n=1}^{N}{}' \sum_{m=1}^{N} B_n B_m \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx}_{\pi \delta_{nm}} - A_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx - 2\sum_{n=1}^{N}{}' A_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$- 2\sum_{n=1}^{N}{}' B_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx + A_0 \sum_{n=1}^{N}{}' A_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx}_{=0} + A_0 \sum_{n=1}^{N}{}' B_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx}_{=0}$$

$$+ 2\sum_{n=1}^{N}{}' \sum_{m=1}^{N}{}' A_n B_m \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx}_{=0}$$

$\therefore$

$$\Delta_N = \int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx + \frac{\pi}{2}A_0^2 + \sum_{n=1}^{N}\pi A_n^2 + \sum_{n=1}^{N}{}'\,\pi B_n^2$$

$$- A_0\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx - 2\sum_{n=1}^{N}A_n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx - 2\sum_{n=1}^{N}{}'B_n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

Exigindo agora que $\frac{\partial\Delta_N}{\partial A_0} = \frac{\partial\Delta_N}{\partial A_n} = \frac{\partial\Delta_N}{\partial B_n} = 0 \quad (n = 1,\dots,N)$

$$\frac{\partial\Delta_N}{\partial A_0} = \pi A_0 - \int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx = 0 \Rightarrow A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx = a_0$$

$$\frac{\partial\Delta_N}{\partial A_n} = 2\pi A_n - 2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx = 0 \Rightarrow A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx = a_n$$

$$\frac{\partial\Delta_N}{\partial B_n} = 2\pi B_n - 2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx = 0 \Rightarrow B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx = b_n$$

Além disso, é fácil ver que o extremo em questão é um mínimo.

✓

Com isso, temos que $\Delta_N^{min.}$ é dado por

$$\Delta_N^{min.} = \int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx + \frac{\pi}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{N}\pi a_n^2 + \sum_{n=1}^{N}\pi b_k^2$$

$$- a_0(\pi a_0) - 2\sum_{n=1}^{N}a_n(\pi a_n) - 2\sum_{n=1}^{N}{}'\,b_n(\pi b_n)$$

$$\therefore \quad \Delta_N^{min} = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2) \right]$$

Além disso, como $\Delta_N \geq 0$, temos que

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx$$

➡ PROP: Os coeficientes de Fourier satisfazem a chamada desigualdade de Bessel:

$$\boxed{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx}$$

DEM: Seja a sequência $\{s_N\}$, onde $s_N = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2)$. Como consequência de $\Delta_N \geq 0$, temos acima que essa sequência é limitada. Além disso, ela é evidentemente monótona. Como uma sequência monótona e limitada é convergente, segue que existe $\lim_{N \to \infty} s_N$ satisfazendo essa desigualdade.

✓

Antes de prosseguir, podemos notar, dada a N-ésima soma parcial $S_N(x)$ da série de Fourier,

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) ,$$

que

$$\|S_N\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} [S_N(x)]^2 dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0^2}{4} dx + \sum_{n=1}^{N}{}' \sum_{m=1}^{N} a_n a_m \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx}_{\pi \delta_{nm}} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{N}{}' \sum_{m=1}^{N}{}' b_n b_m \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx}_{\pi \delta_{nm}} + \frac{2a_0}{2} \sum_{n=1}^{N} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx}_{=0}$$

$$+ 2 \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{N}{}' b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx}_{=0} + 2 \sum_{n=1}^{N}{}' \sum_{m=1}^{N}{}' a_n b_m \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx}_{=0}$$

ou seja,

$$\|S_N\|^2 = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}{}' (a_n^2 + b_n^2) \right]$$

Portanto, a desigualdade de Bessel pode ser escrita como

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} \|S_N\|^2 \leq \|f\|^2}$$

É chegada a hora de uma importante definição!

DEF: Dizemos que $\phi_N(x)$ <u>converge</u> <u>na</u> <u>média</u> para $f(x)$ se

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} \|f - \phi_N\| = 0}$$

Para explorarmos essa definição necessitamos de um resultado auxiliar:

• **LEMA**: Seja $S_N(x)$ a N-ésima soma parcial da série de Fourier de $f(x)$. Então

$$\langle f, \phi_N \rangle = \langle S_N, \phi_N \rangle$$

DEM: $$\langle f, \phi_N \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(A_n \cos nx + B_n \sin nx)\right] dx$$

$$= \frac{A_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \sum_{n=1}^{N} A_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx + \sum_{n=1}^{N} B_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} A_0 a_0 + \pi \sum_{n=1}^{N} (a_n A_n + b_n B_n)$$

$$\langle S_N, \phi_N \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \left[\frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{N} (A_m \cos mx + B_m \sin mx) \right] dx$$

$$= \frac{\pi}{2} A_0 a_0 + \pi \sum_{n=1}^{N} (a_n A_n + b_n B_n)$$

✓

Podemos agora notar que o desvio ~~total~~ quadrático Δ_N é dado por

$$\| f - \phi_N \|^2 = \| f \|^2 + \| \phi_N \|^2 - 2 \langle f, \phi_N \rangle$$

$$= \| f \|^2 - \| S_N \|^2 + \| S_N \|^2 + \| \phi_N \|^2 - 2 \langle S_N, \phi_N \rangle$$

$$= \underbrace{\| f \|^2 - \| S_N \|^2}_{\geq 0 \text{ (Bessel)}} + \underbrace{\| S_N - \phi_N \|^2}_{\geq 0}$$

Sendo $\| f - \phi_N \|^2 \geq 0$ e sendo essa quantidade minimizada quando $S_N(x) = \phi_N(x)$ (teorema da pág. 34), então para que $\lim_{N \to \infty} \| f - \phi_N \| = 0$ devemos ter, além de $S_N(x) = \phi_N(x)$, a igualdade na desigualdade de Bessel, ou seja, $\lim_{N \to \infty} \| S_N \|^2 = \| f \|^2$. Além de necessária, essa condição é claramente suficiente.

TEOREMA: Uma condição necessária e suficiente para a série de Fourier convergir na média para $f(x)$ é valer a chamada identidade de Parseval

$$\boxed{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, dx}$$

DEM: página anterior...

Outra notação para a identidade de Parseval é:

$$\boxed{\lim_{N \to \infty} \| S_N \|^2 = \| f \|^2}$$

• OBS: Dizemos que o conjunto $\{1, \cos nx, \sin nx\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ é completo no sentido da convergência na média em $\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$.

I.6.1. CONVERGÊNCIA NA MÉDIA VERSUS CONVERGÊNCIA PONTUAL E CONVERGÊNCIA UNIFORME

Dizemos que uma sequência $\{f_n(x)\}$ converge pontualmente (ponto a ponto) para $f(x)$ se para cada $x \in I$ e $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, N = N(x, \epsilon) > 0$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para $n > N$.

Dizemos que uma sequência $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente para $f(x)$ se $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, N = N(\epsilon) > 0$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para $n > N$ e $\forall\, x \in I$.

OBS: Note que na convergência pontual permitimos que $N = N(x)$ enquanto na uniforme exigimos que N seja o mesmo para todo $x \in I$.

EX Seja $I = [0, 1]$ e

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx, & x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ -2nx + 2, & x \in (\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0, & x \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

Note que para $x = 0$ temos $f_n(0) = 2n0 = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Já para $x \neq 0$, vamos tomar o inteiro N tal que $N > \frac{1}{x}$, $(x \in (0, 1])$. Então para $n > N > \frac{1}{x}$, ou seja, $x > \frac{1}{n}$, de modo que $x \in (\frac{1}{n}, 1]$, temos $f_n(x) = 0$. Logo

$$|f_n(x) - 0| = 0 < \varepsilon \quad \text{para } n > N > \frac{1}{x},$$

de modo que a sequência $\{f_n(x)\}$ converge pontualmente para $f(x) = 0$.

Por outro lado, vamos considerar $\varepsilon < 1$. Note que

$$f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = 2n \cdot \frac{1}{2n} = 1 > \varepsilon \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Logo, não temos $|f_n(x) - 0| < \varepsilon$ para todo $x \in [0, 1]$ (e $n > N$), de modo que <u>não</u> temos convergência uniforme.

//

A convergência uniforme claramente implica na convergência na média. De fato, se $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para $n > N$ e $\forall x \in [a, b]$, temos

$$\|f_n - f\|^2 = \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx < \varepsilon^2 \int_a^b dx = \varepsilon^2 (b - a) = \varepsilon'$$

para $n > N$, de modo que $\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|^2 = 0$.

Porém, a convergência pontual não implica na convergência na média, como mostra o próximo exemplo.

EX Seja $I = [0,1]$ e

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & x \in [0, \frac{1}{n^3}] \\ 0, & x \in (\frac{1}{n^3}, 1] \end{cases}$$

$$\|f_n\|^2 = \int_0^1 f_n^2(x)dx = \int_0^{1/n^3} n^2 dx = n^2 \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n} \quad \therefore \|f_n\| = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \|f_n\| = 0$$

de modo que $f_n(x)$ converge na média, em $\mathcal{L}^2(0,1)$, para $f(x) = 0$.

Por outro lado:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \in (0,1] \end{cases},$$

de modo que o limite da função não é zero. //

<u>OBS</u>: Do exemplo anterior, vemos que a diferença entre a convergência pontual e na média é um conjunto de medida nula. Porém, como em $\mathcal{L}^2(a,b)$ temos que seus elementos são classes de equivalência de funções que diferem por um conjunto de medida nula, vemos que $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ do exemplo anterior está na classe de equivalência da função zero, que é para quem converge a sequência na média.

TEOREMA: Seja f uma função contínua sobre o intervalo $[-\pi, \pi]$ tal que $f(-\pi) = f(\pi)$ e seja f' contínua por partes nesse intervalo. Então a série de Fourier de $f(x)$,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

converge absolutamente e uniformemente para $f(x)$ com $x \in [-\pi, \pi]$.

DEM:

$$\begin{aligned} |a_n \cos nx + b_n \sin nx| &\leq |a_n \cos nx| + |b_n \sin nx| \\ &\leq |a_n| + |b_n| \end{aligned}$$

Pelo teste da comparação, se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ convergem, então $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ converge absolutamente.
Além disso, pelo critério M de Weierstrass (se existe uma série convergente de constantes positivas $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ tal que $|u_n(x)| \leq M_n$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ é uniformemente convergente nesse intervalo), se provarmos que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ convergem, provamos também que a série converge absolutamente e uniformemente.

Podemos ainda notar que, como

$$|a_n| \leq \sqrt{a_n^2+b_n^2}\ , \quad |b_n| \leq \sqrt{a_n^2+b_n^2}\ ,$$

basta provar que $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ converge.

Seja a série de Fourier de $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx),$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\, dx \quad (n=0,1,2,\ldots),\ \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\, dx \quad (n=1,2,\ldots)$$

Se $f'(x)$ é contínua por partes então existem α_n e β_n.
Além disso, usando a hipótese que $f(\pi) = f(-\pi)$,

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f'(x) = \frac{1}{\pi}\left[f(\pi) - f(-\pi)\right] = 0$$

Assim, a desigualdade de Bessel fica:

$$\underbrace{\frac{\alpha_0^2}{2}}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^2+\beta_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f'(x)]^2 dx \leq K$$

ou seja

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^2+\beta_n^2) \leq K$$

Mas:

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx = \underbrace{\frac{1}{\pi} f(x)\cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi}}_{\substack{f(\pi)\cos n\pi - f(-\pi)\cos n(-\pi) \\ = [f(\pi)-f(-\pi)]\cos n\pi = 0}} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$\therefore \quad \alpha_n = n\, b_n$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx = \underbrace{\frac{1}{\pi} f(x)\sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$\therefore \quad \beta_n = -n\, a_n$$

Com isso:

$$\sum_{n=1}^{N} \sqrt{a_n^2+b_n^2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}$$

usando a desigualdade de Cauchy:

$$\left(\sum_{n=1}^{N} A_n B_n\right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{N} A_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{N} B_n^2\right)$$

com $A_n = \frac{1}{n}$ e $B_n = \sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}$ temos

$$\sum_{n=1}^{N} \sqrt{a_n^2+b_n^2} \leq \left[\underbrace{\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\right)}_{\leq C}\underbrace{\left(\sum_{n=1}^{N} (\alpha_n^2+\beta_n^2)\right)}_{\leq K}\right]^{1/2}$$

ou seja,

$$\sum_{n=1}^{N} \sqrt{a_n^2+b_n^2} \leq M = cte.$$

Sendo limitada e monótona, segue que essa sequência é convergente.

<u>OBS</u>: Desigualdade de Cauchy:

$$\sum_{n=1}^{N} (A_n x + B_n)^2 = x^2 \sum_{n=1}^{N} A_n^2 + 2x \sum_{n=1}^{N} A_n B_n + \sum_{n=1}^{N} B_n^2 = 0$$

é uma equação que <u>não</u> pode ter duas raízes reais distintas. De fato, se x_0 é raiz, temos $A_n x_0 + B_n = 0$, ou seja, $x_0 = -B_n/A_n$ para todo n e $x_0 \neq x_1$. Logo só pode haver uma raiz real ou nenhuma, o que acontece se e só se $\Delta \leq 0$. Sendo assim:

$$\Delta = 4\left(\sum_{n=1}^{N} A_n B_n\right)^2 - 4\left(\sum_{n=1}^{N} A_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{N} B_n^2\right) \leq 0,$$

de onde segue a desigualdade de Cauchy

$$\left(\sum_{n=1}^{N} A_n B_n\right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{N} A_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{N} B_n^2\right)$$

Resumindo os tipos de convergência e suas condições suficientes, temos:

CONVERGÊNCIA UNIFORME

1) f contínua
2) $f(\pi) = f(-\pi)$
3) f' contínua por partes

CONVERGÊNCIA PONTUAL

1) f contínua por partes e periódica
2) Existem as derivadas laterais

OBS: converge para $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$

EXCETO

em um conjunto de medida nula

CONVERGÊNCIA NA MÉDIA

1) $f \in \mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$
2) f periódica