VI TRANSFORMADAS INTEGRAIS: OUTROS EXEMPLOS E APLICAÇÕES

Uma transformada integral é uma transformação que leva uma função $f(x)$ em uma função $F(y)$ através de

$$\boxed{F(y) = \int_{\alpha}^{\beta} K(x,y) f(x)\, dx}$$

Chamamos $K(x,y)$ de núcleo da transformada. Podemos ainda, no caso de considerarmos variáveis complexas, tomar a integral acima ao longo de um caminho no plano complexo. Os exemplos que já vimos são:

(i) Fourier: $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$, $K(x,y) = e^{ixy}$

(ii) Laplace: $\alpha = 0$, $\beta = +\infty$, $K(x,y) = e^{-xy}$

Existem, é claro, vários outros exemplos mais ou menos importantes dependendo do contexto considerado. Vamos a seguir ver alguns outros exemplos que tem a sua importância particular.

VI.1 TRANSFORMADA DE MELLIN

Vamos considerar o par de transformadas de Fourier:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t)\, e^{i\omega t}\, dt \quad , \quad \alpha < Im(\omega) < \beta$$

$$a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{i\gamma-\infty}^{i\gamma+\infty} A(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega \quad , \quad \alpha < \gamma < \beta.$$

Vamos fazer a mudança de variáveis

$$\boxed{p = i\omega} \qquad \boxed{x = e^{t}}$$

Assim:

$$\underbrace{A(-ip)}_{F(p)} = \int_0^{\infty} a(\ln x)\, x^{p} \frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} \underbrace{a(\ln x)}_{f(x)}\, x^{p-1}\, dx$$

$$\underbrace{a(\ln x)}_{f(x)} = \frac{1}{2\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \underbrace{A(-ip)}_{F(p)}\, x^{-p} \frac{dp}{i} \quad , \quad \alpha < Re(p) < \beta$$

Definimos assim a TRANSFORMADA DE MELLIN

$$\boxed{F(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} f(x)\, dx}$$

e a <u>TRANSFORMADA DE MELLIN INVERSA</u>

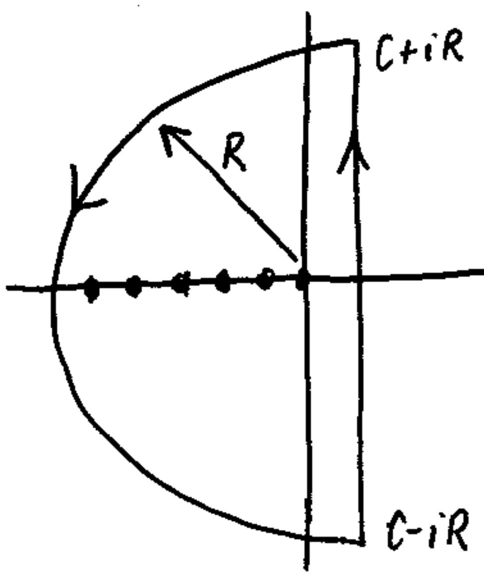
$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty} F(p)\, x^{-p}\, dp}$$

EX

$$f(x) = e^{-\alpha x}\ , \quad \alpha > 0$$

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} x^{p-1} dx = \frac{1}{\alpha^p}\int_0^\infty e^{-y} y^{p-1} dy = \frac{\Gamma(p)}{\alpha^p}$$

Para calcular a transformada inversa devemos lembrar que a função gama $\Gamma(p)$ possui pólos simples em $p = 0, -1, -2, -3, \dots$



$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty} x^{-p}\frac{\Gamma(p)}{\alpha^p}\, dp$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty} (\alpha x)^{-p}\,\Gamma(p)\, dp$$

$$= \sum_{K=0}^{\infty} \underset{p=-K}{\mathrm{Res}}\left[(\alpha x)^{-p}\,\Gamma(p)\right]$$

$$\operatorname*{Res}_{p=-K}\left[(\alpha x)^{-p}\Gamma(p)\right] = \lim_{p\to -K}(p+K)(\alpha x)^{-p}\Gamma(p) = \left[\lim_{p\to -K}(p+K)\Gamma(p)\right](\alpha x)^{K}$$

Mas $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, de modo que

$$(p+K)\Gamma(p) = \frac{(p+K)}{p}\Gamma(p+1) = \frac{(p+K)}{p(p+1)}\Gamma(p+2) = \ldots = \frac{\cancel{(p+K)}\,\Gamma(p+K+1)}{p(p+1)\ldots(p+K-1)\cancel{(p+K)}}$$

$$\therefore \lim_{p\to -K}(p+K)\Gamma(p) = \frac{\Gamma(1)}{(-K)(-K+1)\ldots(-1)} = \frac{(-1)^K\Gamma(1)}{K(K-1)\ldots 1} = \frac{(-1)^K}{K!}$$

$$\therefore f(x) = \sum_{K=0}^{\infty}{}' \frac{(-1)^K}{K!}(\alpha x)^K = e^{-\alpha x}$$

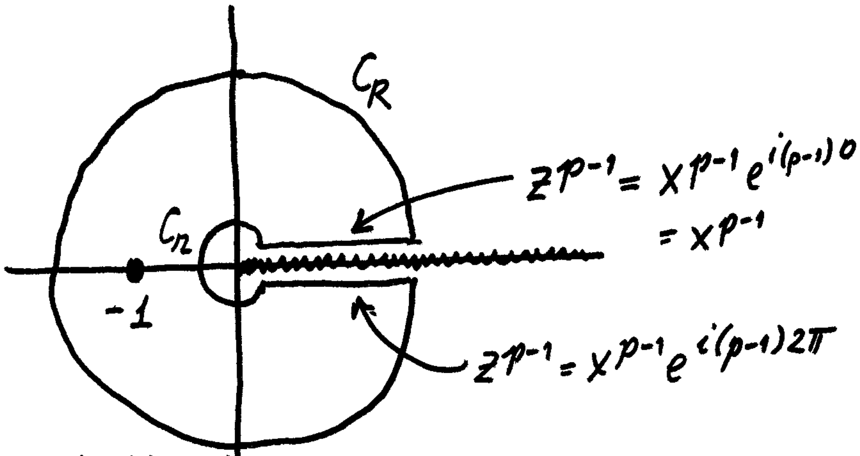
EX

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$F(p) = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \;?$$

Vamos considerar a integral no plano complexo:

$$I(p) = \oint_C \frac{z^{p-1}}{1+z}dz$$



$$z^{p-1} = e^{(p-1)\operatorname{Ln} z} =$$

$$= e^{(p-1)(\operatorname{Ln}|z| + i(\theta+2K\pi))} = |z|^{p-1}e^{i(p-1)(\theta+2K\pi)}$$

Podemos ainda notar que

$$\left|\int_{C_R}(\cdots)\right| \leq \int_0^{\infty} \frac{|R|^{p-1}\, R}{R}\, d\theta \sim |R|^{p-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0 \text{ se } p<1$$

$$\left|\int_{C_r}(\cdots)\right| \leq \int_0^{\infty} \frac{|r|^{p-1}\, r\, d\theta}{\underbrace{1+r}_{\sim 1}} \sim |r|^{p} \xrightarrow{r\to 0} 0 \text{ se } p>0$$

$\therefore$

$$2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = \int_r^R(\cdots) + \int_{C_R}(\cdots) + \int_R^r(\cdots) + \int_{C_r}(\cdots)$$

$$= \lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}}(\cdots\cdot) = \int_0^{\infty}(\cdots) + \int_{\infty}^{0}(\cdots)$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}dx}{1+x} + \int_{\infty}^{0}\frac{x^{p-1}e^{i(p-1)2\pi}}{1+x}dx =$$

$$= \left(1-e^{i(p-1)2\pi}\right)\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}dx}{1+x} =$$

$$= e^{i(p-1)\pi}\left(e^{-i(p-1)\pi} - e^{i(p-1)\pi}\right)\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}dx}{1+x}$$

$$= e^{i(p-1)\pi}\left(-e^{-ip\pi} + e^{ip\pi}\right)\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx$$

Mas :

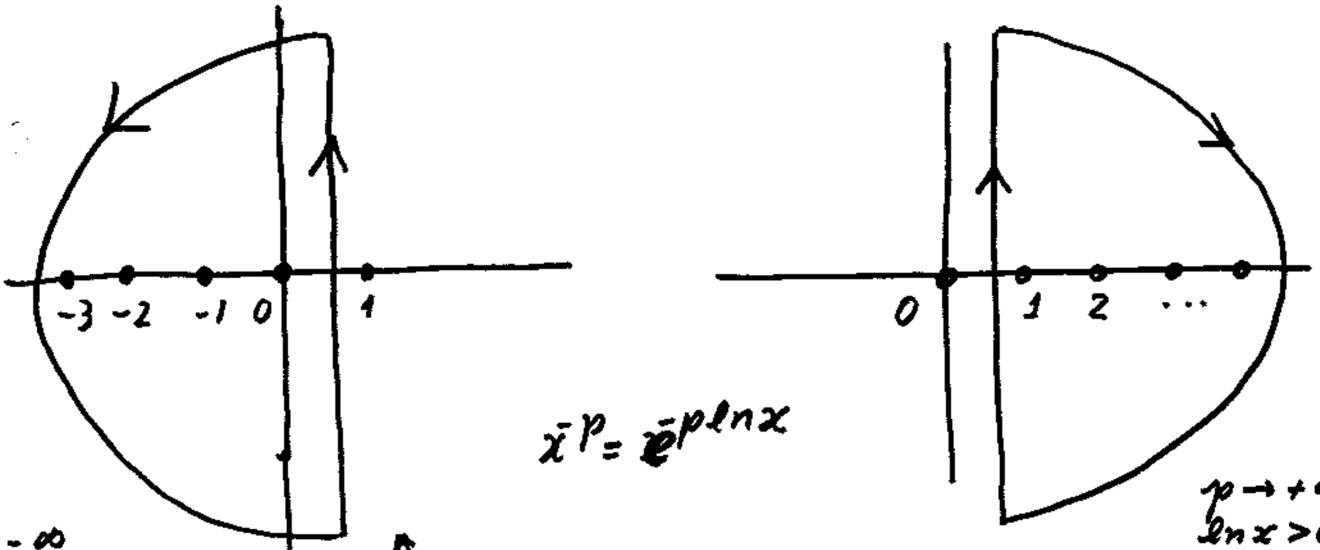
$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z\to -1} (z+1)\,\frac{z^{p-1}}{1+z} = (-1)^{p-1} = e^{i(p-1)\pi}$$

$$\therefore\quad 2\pi i\, e^{i(p-1)\pi} = e^{i(p-1)}\left(e^{ip\pi} - e^{-ip\pi}\right)\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx$$

$$\therefore\quad \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = F(p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

Já para a transformada inversa:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{\pi}{\sin p\pi}\, x^{-p}\,dp \qquad \therefore \text{ pólos simples em } p = k\pi \;(k\in\mathbb{Z})$$



$x^{-p} = e^{-p\ln x}$

$p \to -\infty$

$\ln x < 0 \;\therefore\; \boxed{0 < x < 1}$

$p \to +\infty$

$\ln x > 0$

$\therefore \boxed{x > 1}$

$\therefore$ и $0<x<1$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname*{Res}_{p=-k}\left[\frac{\pi x^{-p}}{\sin p\pi}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{p\to -k} \frac{(p+k)\pi}{\sin p\pi} x^{-p} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{q\to 0} \frac{q\pi\, x^{-(q-k)}}{\underbrace{\sin(q-k)\pi}_{(-1)^k \sin q\pi}} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\lim_{q\to 0} \frac{q\pi}{\sin q\pi}}_{1} x^{-q} \frac{x^k}{(-1)^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$$

и $x>1$

$$f(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname*{Res}_{p=k}\left[\frac{\pi x^{-p}}{\sin p\pi}\right] = -\sum_{k=1}^{\infty} \lim_{p\to k} \frac{(p-k)\pi x^{-p}}{\sin p\pi} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \lim_{q\to 0} \frac{q\pi\, x^{-(q+k)}}{\underbrace{\sin(q+k)\pi}_{(-1)^k \sin q\pi}} = -\sum_{k=1}^{\infty} \lim_{q\to 0} \frac{q\pi}{\sin q\pi} x^{-q} \frac{x^{-k}}{(-1)^k} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} (-x^{-1})^k = -\left[\sum_{k=0}^{\infty} (-x^{-1})^k - 1\right] = -\left[\frac{1}{1+x^{-1}} - 1\right] =$$

$$= -\left[\frac{1-1-x^{-1}}{1+x^{-1}}\right] = \frac{x^{-1}}{1+x^{-1}} = \frac{1}{x+1}$$

se $x=1$:

$$f(1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\pi\, dp}{\sin p\pi} = \frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{-iR}^{iR}\frac{d(p\pi)}{\sin p\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty} \ln\tan\frac{p\pi}{2}\Big|_{-iR}^{+iR} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\left[\ln\tan\frac{iR\pi}{2} - \ln\tan\left(\frac{-iR\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\ln\left[\frac{\tan iR\pi/2}{\tan(-iR\pi/2)}\right] = \frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\ln\left[\frac{\cancel{\tan iR\pi/2}}{-\cancel{\tan iR\pi/2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\ln(-1) = \frac{1}{2\pi i}\ln(e^{i\pi}) = \frac{1}{2\pi i}\cdot i\pi = \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{1+x} \qquad \therefore f(1) = \frac{1}{2}$$

//

Para estudar algumas propriedades da transformada de Mellin, vamos usar uma notação apropriada:

$$\boxed{\mathcal{M}[f](p) = \int_0^\infty f(x)\, x^{p-1}\, dx}$$

Algumas das propriedades mais importantes das transformadas de Mellin são:

$$\mathcal{M}[x^\alpha f(x)](p) = \mathcal{M}[f(x)](p+\alpha)$$

$$\mathcal{M}[f'(x)](p) = -(p-1)\mathcal{M}[f(x)](p-1)$$

$$\mathcal{M}[x f'(x)](p) = -p\,\mathcal{M}[f(x)](p)$$

$$\mathcal{M}[x^n f^{(n)}(x)](p) = (-1)^n (p)_n\, \mathcal{M}[f(x)](p)$$

onde usamos o símbolo de Pochhammer $(p)_n = p(p+1)\cdots(p+n-1)$. Quanto à demonstração, a da primeira é óbvia. Já a segunda se faz por partes, sendo que observamos que devemos supor $\lim_{x\to 0} f(x)x^{p-1} = 0$ para $Re(p) > \alpha$ e $\lim_{x\to\infty} f(x)x^{p-1} = 0$ para $Re(p) < \beta$, sendo que $\mathcal{M}[f(x)](p)$ existe para $\alpha < Re(p) < \beta$. A terceira e a quarta seguem usando essas duas primeiras propriedades.

Quanto à propriedade de convolução, precisamos adaptar a sua definição para a transformada de Mellin. Como passamos de Fourier para Mellin através da mudança de variável $x = e^t$, vamos fazer essa mudança na definição da convolução dentro do contexto das transformadas de Fourier. Tomando

$$x = e^{t}, \quad \xi = e^{\tau}$$

temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = \int_{0}^{\infty} f(\ln\xi)\, g(\ln x - \ln\xi)\, \frac{d\xi}{\xi} = \int_{0}^{\infty} \xi^{-1} F(\xi)\, G\left(\frac{x}{\xi}\right) d\xi$$

Portanto, dentro do contexto das transformadas de Mellin, definimos a <u>convolução</u> como

$$\boxed{(f*g)(x) = \int_{0}^{\infty} \xi^{-1} f(\xi)\, g\left(\frac{x}{\xi}\right) d\xi}$$

Agora:

$$\mathcal{M}[(f*g)(x)] = \int_{0}^{\infty} dx\, x^{p-1} \int_{0}^{\infty} d\xi\, \xi^{-1} f(\xi)\, g\left(\frac{x}{\xi}\right) =$$

$$= \int_{0}^{\infty} dx \int_{0}^{\infty} d\xi\; x^{p-1} \xi^{-1} f(\xi)\, g\left(\frac{x}{\xi}\right) \overset{x = \xi y}{=} \int_{0}^{\infty} dy \int_{0}^{\infty} d\xi\; \xi (\xi y)^{p-1} \xi^{-1} f(\xi)\, g(y) =$$

$$= \int_{0}^{\infty} dy\, y^{p-1} g(y) \int_{0}^{\infty} d\xi\, \xi^{p-1} f(\xi) = \mathcal{M}[f](p)\, \mathcal{M}[g](p)$$

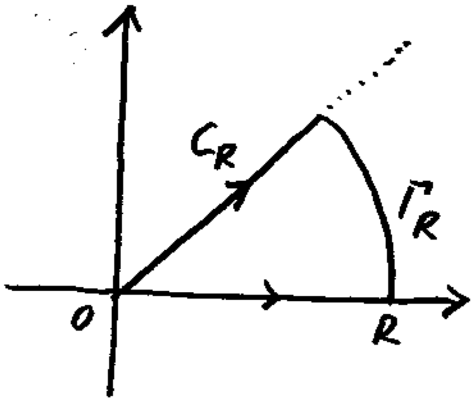
de modo que, com essa definição de convolução, temos

$$\mathcal{M}[(f*g)(x)](p) = \mathcal{M}[f(x)](p)\,\mathcal{M}[g(x)](p)$$

Outra propriedade a considerar envolve a transformada $\mathcal{M}[f(xe^{i\theta})]$. Temos

$$\mathcal{M}[f(xe^{i\theta})](p) = \int_0^\infty dx\, x^{p-1} f(xe^{i\theta}) = e^{-i\theta p}\int_C dy\, y^{p-1} f(y)$$

onde tomamos $y = xe^{i\theta}$. Visto que a operação $z \mapsto ze^{i\theta}$ é uma rotação por um ângulo θ no plano complexo, o caminho C é o limite do caminho C_R abaixo para $R\to\infty$. Se $f(y)$ é analítica na região limitada pelas curvas ao lado, temos



$$\oint = 0 = -\int_{C_R} + \int_0^R + \int_{\Gamma_R}$$

Em Γ_R temos $y = Re^{i\theta}$, $dy = Re^{i\theta}\, i d\theta$ e

$$\int_{\Gamma_R} i d\theta\, Re^{i\theta}(Re^{i\theta})^{p-1} f(Re^{i\theta}) = \int_{\Gamma_R} i d\theta\, e^{i\theta p}\, R^p f(Re^{i\theta})$$

ou seja

$$\int_{\Gamma_R} \xrightarrow{R\to\infty} 0 \quad \text{se} \quad R^p f(R) \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

Com essa hipótese, temos $\int_C = \int_0^\infty$ e portanto:

$$\mathcal{M}[f(xe^{i\theta})](p) = e^{-i\theta p}\,\mathcal{M}[f(x)](p)$$

ou ainda

$$\cos\theta p\;\mathcal{M}[f(x)](p) = \mathrm{Re}\left[\mathcal{M}[f(xe^{i\theta})]\right](p)$$

$$\sin\theta p\;\mathcal{M}[f(x)](p) = -\,\mathrm{Im}\left[\mathcal{M}[f(xe^{i\theta})]\right](p)$$

Já vimos que

$$\mathcal{M}\left[\frac{1}{1+x}\right] = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

Agora

$$\mathcal{M}[H(a-x)] = \int_0^\infty dx\, x^{p-1} H(a-x) = \int_0^a dx\, x^{p-1} = \frac{a^p}{p} \qquad (p>0)$$

Então temos a convolução:

$$\int_0^\infty d\xi\; \xi^{-1} H(a-\xi)\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\xi}\right)} = \int_0^a d\xi\; \xi^{-1}\frac{\xi}{\xi+x} = \ln(\xi+x)\Big|_0^a = \ln\left(\frac{x+a}{x}\right)$$

Então:

$$\mathcal{M}\left[\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right] = \frac{a^p}{p}\cdot\frac{\pi}{\sin p\pi}$$

//