V TRANSFORMADAS DE LAPLACE

V.1 DEFINIÇÃO E EXEMPLOS

Vamos considerar uma série de potências

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad , \ |x| \leq h.$$

Uma forma de generalizar essa série é considerando uma sequência $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ tal que

$$0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots \ , \ \lim_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$$

e definindo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\lambda_k}$$

Ocorre, porém, que essa definição requer um cuidado para lidar com os valores negativos de x pois podemos ter que extrair raízes de x para certos valores de λ_k. Para contornar essa situação, vamos considerar $x \geq 0$. Para garantir isso, vamos tomar $x = e^{-s}$ e definir

$$F(s) = f(e^{-s}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-s\lambda_k}$$

Essa série é chamada série de Dirichlet. Uma vez que $\Delta K = (K+1) - K = 1$, temos

$$F(s) = \sum_{K=0}^{\infty} a_K e^{-s\lambda_K} \Delta K$$

e assumindo que K tome valores contínuos e depois o limite $\Delta K \to 0$ segue que

$$F(s) = \int_0^{\infty} dK \; a(K)\, e^{-s\lambda(K)}$$

A transformada de Laplace corresponde ao caso $\lambda(K) = K$.

2 → <u>DEF</u>: Dada a função $f(t)$, $0 \le t < \infty$, definimos sua <u>TRANSFORMADA DE LAPLACE</u> como sendo a função $F(s)$

$$\boxed{F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} dt \; f(t) e^{-st}}$$

definida para os valores de s tais que a integral acima exista. Em geral $s \in \mathbb{C}$.

$\boxed{EX}$ $f(t) = 1$

$$\mathcal{L}[1] = \int_0^{\infty} dt \; e^{-st} = -\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad (s > 0)$$

//

EX $f(t) = t^\alpha$

$$\mathcal{L}[t^\alpha] = \int_0^\infty dt\, t^\alpha e^{-st} \overset{y = st\ (s>0)}{=} \frac{1}{s^{\alpha+1}} \underbrace{\int_0^\infty y^\alpha e^{-y} dy}_{\Gamma(\alpha+1)\quad (\alpha > -1)}$$

$$\therefore\ \mathcal{L}[t^\alpha] = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} \quad (s>0), \qquad \mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (s>0)$$

//

EX $f(t) = \sin kt$

Uma vez que

$$\int dt\, \sin kt\, e^{-st} = \frac{-1}{k^2+s^2}\left[s e^{-st} \sin kt + k e^{-st} \cos kt\right]$$

temos

$$\mathcal{L}[\sin kt] = \frac{-1}{k^2+s^2}\left[s e^{-st} \sin kt + k e^{-st} \cos kt\right]\Big|_0^\infty$$

$$\underset{s>0}{=} -\frac{1}{k^2+s^2}\left[-k\right]$$

$$\therefore\ \mathcal{L}[\sin kt] = \frac{k}{k^2+s^2} \qquad (s>0)$$

Analogamente:

$$\mathcal{L}[\cos kt] = \frac{s}{k^2+s^2} \qquad (s>0)$$

//

EX II $f(t) = e^{at}$

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^\infty dt\, e^{-st} e^{at} = \int_0^\infty dt\, e^{-(s-a)t} = \left.\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right|_0^\infty \underset{\substack{\uparrow \\ s-a>0}}{=} \frac{1}{s-a}$$

$$\therefore \quad \mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \qquad (s>a)$$

//

→ DEF: Uma função $f(t)$ definida no intervalo $a \leq t < \infty$ é de ordem exponencial σ_0 ($\sigma_0 \in \mathbb{R}$) se

$$|e^{-\sigma_0 t} f(t)| \leq M$$

onde $M = cte > 0$.

TEOREMA: Se $f(t)$ é contínua por partes para $0 \leq t < \infty$ e é exponencial de ordem σ_0, então a integral de Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

converge para $Re(s) > \sigma_0$. Além disso, a integral é absoluta e uniformemente convergente para $Re(s) \geq \sigma_1$ se $\sigma_1 > \sigma_0$.

DEM: $s = \sigma + i\omega$; $F_R(s) = \int_0^R e^{-st} f(t)\, dt$

$$|F_R(s)| \leq G_R(s) = \int_0^R |e^{-st} f(t)|\, dt = \int_0^R \underbrace{|e^{-(\sigma+i\omega)t}|}_{e^{-\sigma t}} |f(t)|\, dt$$

descontinuidades: $t_1, \ldots, t_m$

$$\therefore\ G_R(s) = \sum_{\substack{i=0 \\ (t_0=0)}}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-\sigma t} |f(t)|\, dt + \int_{t_m}^{R} e^{-\sigma t} |f(t)|\, dt$$

Mas $|e^{-\sigma_0 t} f(t)| \leq M \Rightarrow |f(t)| \leq M e^{\sigma_0 t}$

$$G_R(s) \leq M \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-(\sigma-\sigma_0)t}\, dt + M \int_{t_m}^{R} e^{-(\sigma-\sigma_0)t}$$

$$\leq M\left(\frac{-1}{\sigma-\sigma_0}\right) \sum_{i=0}^{m-1} e^{-(\sigma-\sigma_0)t}\Big|_{t_i}^{t_{i+1}} + M\left(\frac{-1}{\sigma-\sigma_0}\right) e^{-(\sigma-\sigma_0)t}\Big|_{t_m}^{R}$$

$$\leq \frac{M}{-(\sigma-\sigma_0)}\left[e^{-(\sigma-\sigma_0)t_m} - 1\right] + \frac{M}{-(\sigma-\sigma_0)}\left[e^{-(\sigma-\sigma_0)R} - e^{-(\sigma-\sigma_0)t_m}\right]$$

$$\leq \frac{M}{\sigma-\sigma_0}\left[1 - \underbrace{e^{-(\sigma-\sigma_0)R}}_{\substack{\geq 0 \\ (\sigma > \sigma_0)}}\right] \leq \frac{M}{\sigma-\sigma_0}$$

$\therefore$ $G_R(s)$ é monótona (o integrando é ≥ 0) e limitada, de modo que $G_R(s)$ converge para $R \to \infty$:

$$|F(s)| \leq G(s) = \lim_{R\to\infty} G_R(s)$$

Além disso, a convergência é uniforme para $\sigma_1 > \sigma_0$ segundo o critério M:

$$G_R(s) \underset{\substack{\uparrow \\ s>\sigma_1}}{\leq} \int_0^R |e^{-\sigma_1 t} f(t)|\,dt = \int_0^R |e^{-(\sigma_1-\sigma_0)t}|\underbrace{|e^{-\sigma_0 t} f(t)|}_{\leq M}\,dt$$

$$\leq M \int_0^R e^{-(\sigma_1-\sigma_0)t}\,dt = M \left.\frac{e^{-(\sigma_1-\sigma_0)t}}{\sigma_0-\sigma_1}\right|_0^R$$

$$\leq M \frac{(1-e^{-(\sigma_1-\sigma_0)R})}{\sigma_1-\sigma_0} \leq \frac{M}{\sigma_1-\sigma_0} = M'$$

✓

V.2 PROPRIEDADES

Antes de começarmos a listar algumas propriedades das transformadas de Laplace, devemos notar que duas funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$ tais que

$$f_1(t) = f_2(t) \quad , \quad 0 \leq t < \infty$$
$$f_1(t) \neq f_2(t) \quad , \quad t<0$$

tem a mesma transformada de Laplace. Para evitar essas ambiguidades, vamos estabelecer que sempre que falamos em uma função $f(t)$ estamos nos referindo à função $f_H(t)$,

$$f_H(t) = f(t)\,H(t) = \begin{cases} f(t) & , \ t \geq 0 \\ 0 & , \ t<0 \end{cases}$$

onde $H(t)$ é a função escada de Heaviside.

① TRANSLAÇÃO: Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, então para $a>0$:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}[f_H(t-a)] &= e^{-as}F(s) \\ \mathcal{L}[e^{-at}f(t)] &= F(s+a) \end{aligned}}$$

DEM:

$$\mathcal{L}[f_H(t-a)] = \int_0^\infty e^{-st} f_H(t-a)\,dt = \int_0^\infty e^{-st} f(t-a)\,H(t-a)\,dt =$$

$$= \int_a^\infty e^{-st} f(\underbrace{t-a}_{u})\,dt = \int_0^\infty e^{-s(u+a)} f(u)\,du = e^{-as}\mathcal{L}[f(t)]$$

Podemos notar que essa propriedade não vale para $a<0$ pois nesse caso teríamos, se $a<0$

$$\int_0^\infty e^{-st} f_H(t-a)\,dt = \int_0^\infty e^{-st} f(t-a)\,dt$$

que não guarda a relação acima com $\mathcal{L}[f(t)]$.

Quanto à outra relação:

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} e^{-at} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t} f(t)\,dt$$

e se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ existe para $s > \sigma_0$, então para existir $\mathcal{L}[e^{-at} f(t)]$ devemos ter $s+a > \sigma_0$, ou seja, $a>0$.

② DERIVAÇÃO

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(t)] &= s\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \\ F'(s) &= -\mathcal{L}[tf(t)] \end{aligned}}$$

DEM:

$$\int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt = \underbrace{e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty}_{-f(0)} + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$= s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$$

onde claramente devemos interpretar $f(0)$ como $f(0^+)$.

Já a outra propriedade:

$$F'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}(-t) f(t)\,dt = -\mathcal{L}[t f(t)]$$

Para generalizar essas expressões notamos que

$$\mathcal{L}[f''(t)] = \mathcal{L}[(f'(t))'] = s\,\mathcal{L}[f'(t)] - f'(0) =$$
$$= s[\,s\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0)] - f'(0)$$

ou seja

$$\boxed{\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 \mathcal{L}[f(t)] - s f(0) - f'(0)}$$

As generalizações são, portanto:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=1}^{n} s^{k-1} f^{(n-k)}(0)$$

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)]$$

(3) CONVOLUÇÃO

Quando estudamos as transformadas de Fourier nós definimos a convolução $(f*g)(t)$ como

$$(f*g)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

A presença do fator $\sqrt{2\pi}$ se fez necessária para podermos escrever o teorema da convolução na forma $\mathcal{F}[f*g] = \mathcal{F}[f]\,\mathcal{F}[g]$ visto que na definição de $\mathcal{F}$ havia um fator $\sqrt{2\pi}$. Ocorre que na transformada de Laplace não existe esse fator, de modo que pensando dentro do contexto da teoria das transformadas de Laplace é melhor redefinir a convolução sem o fator $\sqrt{2\pi}$. Sendo assim, tomamos

$$(f_H * g_H)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_H(\tau)\, g_H(t-\tau)\, d\tau = \int_0^{\infty} f(\tau)\, g_H(t-\tau)\, d\tau$$

e como $g_H(t-\tau) = 0$ para $t-\tau < 0$, ou seja, para $\tau > t$, temos

$$\boxed{(f_H * g_H)(t) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau}$$

Iremos escrever simplesmente $(f*g)(t)$ lembrando que estamos dentro do contexto das transformadas de Laplace.

Antes de nos perguntarmos pela transformada de Laplace da convolução, vamos ver se ela é de ordem exponencial quando f e g forem, o que irá garantir a existência da transformada em um certo intervalo. Se $|f(t)| \leq M_1 e^{\alpha t}$ e $|g(t)| \leq M_2 e^{\beta t}$, então

$$|f*g| \leq \int_0^t |f(\tau)|\,|g(t-\tau)|\, d\tau \leq M_1 M_2 \int_0^t e^{\alpha\tau} e^{\beta(t-\tau)} d\tau$$

$$\leq M_1 M_2 e^{\beta t} \int_0^t e^{(\alpha-\beta)\tau} d\tau$$

(i) se $\alpha = \beta$:

$$|f*g| \leq M_1 M_2 e^{\beta t} \int_0^t d\tau = M_1 M_2 e^{\beta t}\, t$$

e como $\exists\, M_3 > 0,\ \epsilon > 0$ tal que $t < M_3 e^{\epsilon t}$, temos

$$|f*g| \leq M_1 M_2 M_3\, e^{(\beta+\epsilon)t}$$

(ii) se $\alpha \neq \beta$

$$|f*g| \leq M_1 M_2 e^{\beta t} \left. \frac{e^{(\alpha-\beta)\tau}}{\alpha-\beta} \right|_0^t = M_1 M_2 \left(\frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta} \right)$$

$$\alpha > \beta \Rightarrow \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta} < \frac{e^{\alpha t}}{\alpha - \beta}$$

$$\beta < \alpha \Rightarrow \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta} = \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{\beta - \alpha} < \frac{e^{\beta t}}{\beta - \alpha}$$

Portanto:

$$|f*g| \leq M e^{\gamma t}$$

$$\gamma = max(\alpha, \beta) + \epsilon > max(\alpha, \beta)$$

TEOREMA (CONVOLUÇÃO): Se $f(t)$ e $g(t)$ são contínuas por partes e de ordens exponenciais α e β respectivamente, então

$$\boxed{\mathcal{L}[(f*g)(t)] = \mathcal{L}[f(t)]\mathcal{L}[g(t)]}$$

para $Re(s) > máx(\alpha, \beta)$.

DEM:

$$\mathcal{L}[(f*g)(t)] = \int_0^{\infty} dt\, e^{-st} (f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, H(t)\, e^{-st} (f*g)(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, H(t)\, e^{-st} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, f_H(\tau)\, g_H(t-\tau) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \;\; H(t)\, e^{-st} f(\tau) H(\tau)\, g(t-\tau) H(t-\tau) \overset{t = u+\tau}{=}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\; H(u+\tau)\, e^{-s(u+\tau)} f(\tau) H(\tau) g(u) H(u) =$$

$$= \int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} d\tau\; e^{-su} e^{-s\tau} f(\tau)\, g(u)\, \underbrace{H(u+\tau)}_{1} =$$

$$= \int_0^{\infty} du\; e^{-su} g(u) \int_0^{\infty} d\tau\; e^{-s\tau} f(\tau) =$$

$$= \mathcal{L}[f(t)]\, \mathcal{L}[g(t)]$$

✓