IV.6 AMOSTRAGEM E TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA NO TEMPO

Vamos nessa seção trabalhar com as variáveis (t, ω) ao invés de (x, k) pois a própria nomenclatura do que segue vem da análise de funções $f(t)$ do tempo t (que nesse caso é chamado sinal). O par de transformadas de Fourier escreve-se portanto

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, F(\omega)\, e^{-i\omega t}}\,, \quad \boxed{F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, f(t)\, e^{i\omega t}}$$

onde t é o tempo e ω a frequência.

Vamos agora considerar uma amostragem do sinal $f(t)$. Por isso entendemos avaliar o valor de $f(t)$ ao longo de um intervalo de amostragem, ou seja, avaliar

$$\boxed{f_n = f(n\Delta t)}$$

para $t = t_n = n\Delta t$ (onde Δt é o intervalo de amostragem).

Por outro lado, da Teoria das séries de Fourier sabemos que podemos representar uma função periódica $\varphi(x)$ por uma sequência de números c_n,

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \quad , \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \varphi(x)\, e^{-inx} .$$

Podemos usar esse fato para associar uma transformada à sequência f_n.

Dada a função $f(t)$, definimos a sua transformada de Fourier discreta no tempo como

$$\boxed{\Phi(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{in\alpha}} \quad , \quad \boxed{f_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha\, \Phi(\alpha)\, e^{-in\alpha}}$$

onde $f_n = f(n\Delta t)$. A pergunta agora é: dado $\{f_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ou $\Phi(\alpha)$, é possível obter $f(t)$? Ou, em outras palavras, é possível reconstruir o sinal $f(t)$ à partir de uma amostragem? Para responder isso vamos olhar a relação entre a transformada de Fourier discreta no tempo e o par de transformadas de Fourier, ou seja:

$$f_n = f(n\Delta t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, F(\omega)\, e^{-i\omega n \Delta t} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{\Delta t}\, F\left(\frac{\tau}{\Delta t}\right) e^{-in\tau} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\Delta t} \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \int_{(2K-1)\pi}^{(2K+1)\pi} d\tau\, F\left(\frac{\tau}{\Delta t}\right) e^{-in\tau} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\Delta t} \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha\, F\left(\frac{\alpha}{\Delta t} + \frac{2K\pi}{\Delta t}\right) e^{-in\alpha}\, \underbrace{e^{-in2K\pi}}_{1}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \left[\frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta t} \sum_{K=-\infty}^{+\infty} F\left(\frac{\alpha}{\Delta t} + \frac{2K\pi}{\Delta t}\right) \right] e^{-in\alpha}$$

ou seja

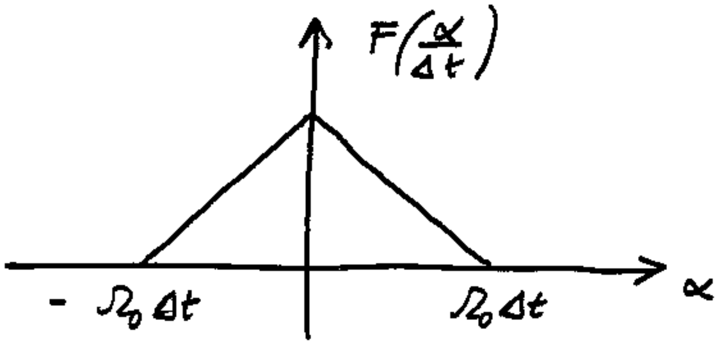
$$\boxed{\Phi(\alpha) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta t} \sum_{K=-\infty}^{+\infty} F\left(\frac{\alpha}{\Delta t} + \frac{2K\pi}{\Delta t}\right)}$$

onde $-\pi \leq \alpha \leq \pi$.

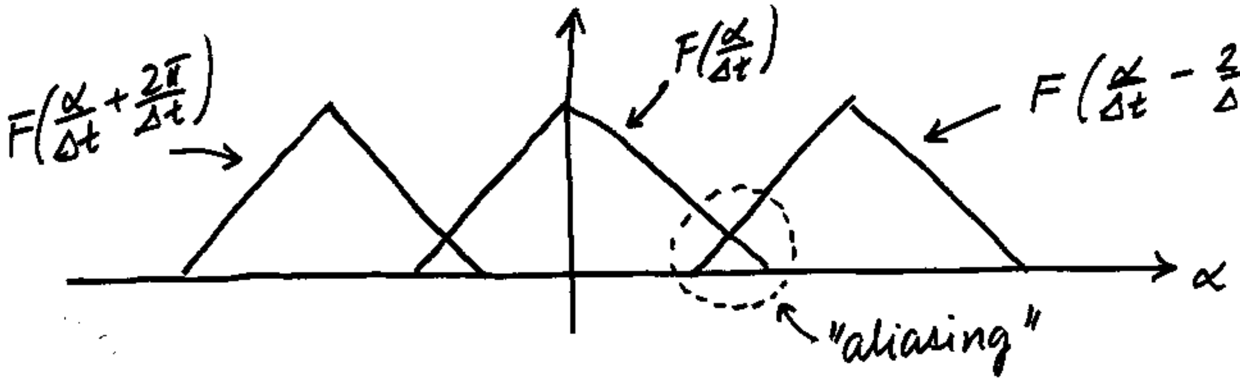
Vamos agora supor que

$$\boxed{F(x) = 0 \quad , \ |x| \geq \Omega_0}$$

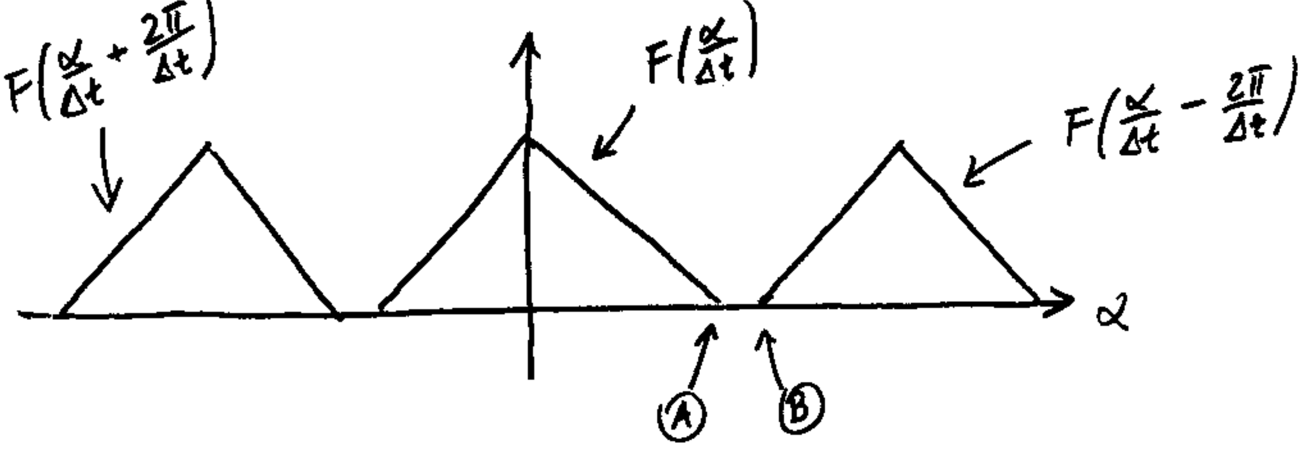
Para sermos mais específicos, vamos tomar



Como $\Phi(\alpha)$ é uma combinação de $F\left(\frac{\alpha}{\Delta t} + K\frac{2\pi}{\Delta t}\right)$ para diferentes valores de K e o gráfico dessas funções são translações por $K\frac{2\pi}{\Delta t}$ do gráfico de $F\left(\frac{\alpha}{\Delta t}\right)$, podemos ter uma das situações abaixo:



ou



É óbvio que apenas no segundo caso a soma dos perfis deslocados não altera o perfil original. Note que nesse caso para os pontos A e B temos $x(B) - x(A) \geq 0$.
Se $F(x) = 0$ para $|x| \geq \Omega_0$, então $x(A) = \Omega_0 \Delta t$ e $x(B) = -\Omega_0 \Delta t + 2\pi$, de modo que devemos ter

$$-\Omega_0 \Delta t + 2\pi - \Omega_0 \Delta t \geq 0$$

$$\boxed{\Omega_0 \Delta t \leq \pi}$$

Além disso, como $-\pi \leq \alpha \leq \pi$ e $x(B)$ nesse caso satisfaz $x(B) \geq 2\pi - \pi \geq \pi$, só temos a contribuição para $\Phi(\alpha)$ da parte com $K=0$, ou seja,

$$\boxed{\Phi(\alpha) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta t} F\left(\frac{\alpha}{\Delta t}\right)}$$

<u>SE</u>

$$\boxed{\begin{array}{l} F(x) = 0 \;, \; |x| \geq \Omega_0 \\ \Omega_0 \Delta t \leq \pi \end{array}}$$

Nessas condições podemos reconstruir $f(t)$! De fato:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, F(\omega) e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Omega_0}^{\Omega_0} d\omega\, F(\omega) e^{-i\omega t} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Omega_0 \Delta t}^{\Omega_0 \Delta t} \frac{d\alpha}{\Delta t}\, F\left(\frac{\alpha}{\Delta t}\right) e^{-i\alpha t/\Delta t} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_0 \Delta t}^{\Omega_0 \Delta t} d\alpha\, \Phi(\alpha) e^{-i\alpha t/\Delta t} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_0 \Delta t}^{\Omega_0 \Delta t} d\alpha \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' f_n\, e^{in\alpha} \right) e^{-i\alpha t/\Delta t} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' f_n \left. \frac{e^{i\alpha(n - t/\Delta t)}}{i(n - t/\Delta t)} \right|_{-\Omega_0 \Delta t}^{\Omega_0 \Delta t} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{f_n}{(n - t/\Delta t)} \left[\frac{e^{i\Omega_0 \Delta t (n - t/\Delta t)} - e^{-i\Omega_0 \Delta t (n - t/\Delta t)}}{2i} \right]$$

ou seja,

$$\boxed{f(t) = \frac{\Delta t}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \frac{\sin \Omega_0 (t - n\Delta t)}{t - n\Delta t}}$$

Essa fórmula para reconstruir $f(t)$ à partir de f_n é a essência do <u>TEOREMA DA AMOSTRAGEM DE SHANNON</u>.

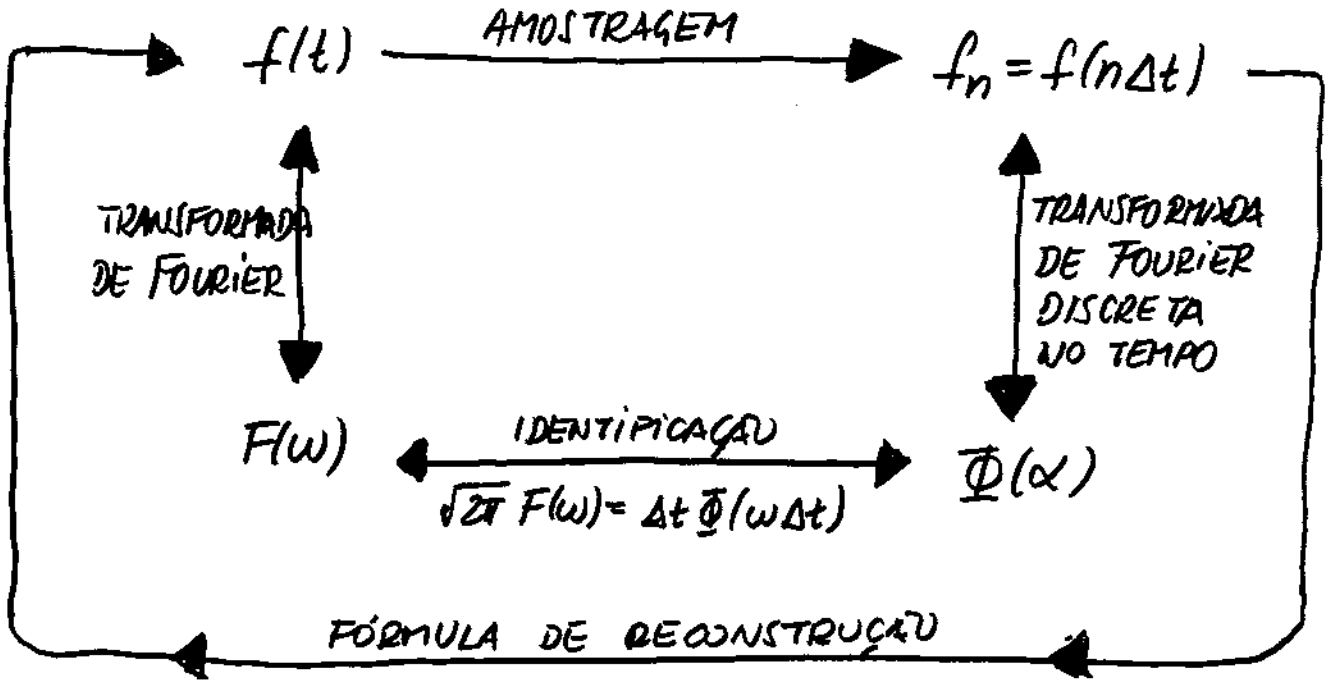
Devemos lembrar as condições para que essa reconstrução seja possível: (1) $F(\omega)$ deve ter suporte limitado ($F(\omega)=0$ para $|\omega| \geq \Omega_0$), e (2) o intervalo de amostragem deve satisfazer

$$\boxed{\Delta t \leq \frac{\pi}{\Omega_0}}$$

ou em termos da frequência de amostragem $\nu = 2\pi/\Delta t$,

$$\boxed{\nu \geq 2\Omega_0}$$

A frequência $2\Omega_0$ é chamada frequência de <u>Nyquist</u>. Podemos resumir nosso situação através do diagrama:



IV.7) TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA

Vamos agora estudar o caso em que temos apenas um número <u>finito</u> $f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}$ de valores de $f(t)$ para o intervalo finito $[0,T]$, de modo que dividindo o intervalo $[0,T]$ em N pontos t_K,

$$t_K = K\frac{T}{N} \quad , \quad K=0,1,\ldots,N-1$$

temos $f_K = f(t_K)$.

Para isso vamos considerar a identidade

$$q^N - 1 = (q-1)(1+q+q^2+\ldots+q^{N-1})$$

Se $q^N = 1$ concluímos que

$$q^N - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} q = 1 \\ \text{ou} \\ 1+q+\ldots+q^{N-1} = 0 \quad \text{se } q \neq 1. \end{cases}$$

As raízes não-triviais de $q^N = 1$ são da forma $e^{n2\pi i/N}$ $(n=1,2,\ldots,N-1)$, de modo que

$$\sum_{K=0}^{N-1} q^K = \begin{cases} 0 \ , & \text{se } q = e^{n2\pi i/N} \ (n=1,2,3,\ldots,N-1) \\ N \ , & \text{se } q = 1 \end{cases}$$

Outra forma de escrevermos isso é fixando

$$q = e^{2\pi i/N}$$

de modo que os outros valores de q são da forma q^n $(n=0,1,\dots,N-1)$, e com isso temos que

$$\boxed{\sum_{K=0}^{N-1} q^{nK} = N\delta_{n0}}$$

onde $\delta_{n0}=0$ se $n\neq 0$ e $\delta_{n0}=1$ se $n=0$.

Definindo

$$\boxed{\omega_n = n\frac{2\pi}{T}}$$

vemos que

$$e^{i\omega_n t_K} = e^{in\frac{2\pi}{T}\cdot K\frac{T}{N}} = \left(e^{i2\pi/N}\right)^{nK} = q^{nK}$$

$$\left(e^{i\omega_n t_K}\right)^* = e^{-i\omega_n t_K} = q^{-nK}$$

Com isso vemos que

$$\sum_{K=0}^{N-1} \left(e^{i\omega_n t_K}\right)^* \left(e^{i\omega_m t_K}\right) = \sum_{K=0}^{N-1} q^{-nK} q^{mK} = \sum_{K=0}^{N-1} q^{(m-n)K}$$

ou seja

$$\boxed{\sum_{K=0}^{N-1} \left(e^{i\omega_n t_K}\right)^* \left(e^{i\omega_m t_K}\right) = N\delta_{mn}}$$

Por outro lado

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{i\omega_n t_K}\right)^* e^{i\omega_n t_\ell} = \sum_{n=0}^{N-1} q^{-nK} q^{n\ell} = \sum_{n=0}^{N-1} q^{n(\ell-K)}$$

ou seja.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{i\omega_n t_K}\right)^* \left(e^{i\omega_n t_\ell}\right) = N\delta_{K\ell}}$$

Isso nos sugere definir $F(\omega_n)$ $(n=0,1,\dots,N-1)$ como

$$\boxed{F(\omega_n) = \sum_{K=0}^{N-1} f(t_K)\, e^{i\omega_n t_K}}$$

Com isso:

$$\sum_{n=0}^{N-1} F(\omega_n)\left(e^{i\omega_n t_\ell}\right)^* = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{K=0}^{N-1} f(t_K)\, e^{i\omega_n t_K} e^{-i\omega_n t_\ell} =$$

$$= \sum_{K=0}^{N-1} f(t_K) \sum_{n=0}^{N-1} q^{nK} q^{-n\ell} = \sum_{K=0}^{N-1} f(t_K)\, N\delta_{K\ell} = N f(t_\ell)$$

ou seja,

$$\boxed{f(t_K) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F(\omega_n)\, e^{-i\omega_n t_K}}$$

Portanto $F(\omega_n)$ é a <u>transformada</u> <u>de</u> <u>Fourier</u> <u>discreta</u> e $f(t_K)$ a sua transformada inversa

Podemos notar que

$$F(\omega_n) = \sum_{K=0}^{N-1} f(t_K)\, q^{nK}$$

pode ser escrita numa forma matricial, ou seja,

$$\vec{F} = Q_N \vec{f}$$

onde Q_N é a chamada matriz de Fourier,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} F(\omega_0) \\ F(\omega_1) \\ \vdots \\ F(\omega_{N-1}) \end{pmatrix}}_{\vec{F}} = \underbrace{\begin{pmatrix} q^{00} & q^{01} & \cdots & q^{0(N-1)} \\ q^{10} & q^{11} & \cdots & q^{1(N-1)} \\ \vdots & & & \\ q^{(N-1)0} & q^{(N-1)1} & \cdots & q^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}}_{Q_N} \underbrace{\begin{pmatrix} f(t_0) \\ f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_{N-1}) \end{pmatrix}}_{\vec{f}}$$

Como podemos ver, a matriz Q_N apresenta uma grande redundância. De fato:

$$Q_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & q & q^2 & \cdots & q^{N-1} \\ 1 & q^2 & q^4 & \cdots & q^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & q^{N-1} & q^{2(N-1)} & \cdots & q^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}$$

Podemos eliminar um pouco dessa redundância através de um algoritmo chamado "transformada de Fourier rápida", ou simplesmente FFT (Fast Fourier Transform). Para isso é essencial que o número de pontos seja 2^n, ou seja

$$\boxed{N = 2^n}$$

Vamos ainda denotar

$$N_K = 2^{n-K}$$

de modo que

$$N = 2^K N_K \qquad (K = 0, 1, \dots, n)$$

Considerando $F(\omega_n)$, podemos escrever $(N = 2N_1)$

$$F(\omega_n) = \sum_{K=0}^{N-1}{}' f(t_K) q^{nK} = \sum_{K=0}^{N_1-1}{}' f(t_K) q^{nK} + \sum_{K=N_1}^{2N_1-1}{}' f(t_K) q^{nK} =$$

$$= \sum_{K=0}^{N_1-1}{}' f(t_K) q^{nK} + \sum_{K=0}^{N_1-1}{}' f(t_{(K+N_1)}) q^{n(K+N_1)}$$

Mas:

$$q = e^{2\pi i/N} = e^{2\pi i/2N_1} = e^{\pi i/N_1}$$

ou seja,

$$q^{N_1} = e^{\pi i} = -1 \quad , \quad q^{nN_1} = (-1)^n$$

Logo:

$$F(\omega_n) = \sum_{K=0}^{N_1-1}{}' f(t_K) q^{nK} + \sum_{K=0}^{N_1-1}{}' f(t_{K+N_1}) q^{nK} (-1)^n$$

$$= \sum_{K=0}^{N_1-1}{}' \left[f(t_K) + (-1)^n f(t_{K+N_1}) \right] q^{nK}$$

De modo que

$$F(\omega_{2n_1}) = \sum_{K=0}^{N_1-1}{}' \left[f(t_K) + f(t_{K+N_1}) \right] (q^2)^{Kn_1}$$

$$F(\omega_{2n_1+1}) = \sum_{K=0}^{N_1-1}{}' \left[f(t_K) - f(t_{K+N_1}) \right] (q^2)^{Kn_1} q^K$$

para $n_1 = 0, 1, \ldots, N_1 - 1$.

Como a matriz Q_N é $N \times N = 2^n \times 2^n = 2^{2n}$, agora temos $2\, N_1 \times N_1 = 2\, 2^{(n-1)} 2^{(n-1)} = 2^{2n-1}$, ou seja, o número de operações (multiplicações) é reduzido pela metade.

Uma forma de olhar para o procedimento acima é notando que

$$q^2 = \left(e^{2\pi i/N}\right)^2 = e^{2\pi i/(N/2)} = e^{2\pi i/N_1} = q_1 ,$$

ou seja, $(q^2)^{Kn_1}$ $(K, n_1 = 0, 1, \ldots, N_1 - 1)$ são as entradas da matriz de Fourier para N_1, ou seja, Q_{N_1}.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} F(\omega_0) \\ F(\omega_2) \\ \vdots \\ F(\omega_{2N_1-2}) \end{pmatrix}}_{\vec{F}_+} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & q^2 & \cdots & (q^2)^{N_1-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & (q^2)^{N_1-1} & & (q^2)^{(N_1-1)(N_1-1)} \end{pmatrix}}_{Q_{N_1}} \begin{pmatrix} f(t_0) + f(t_{N_1}) \\ f(t_1) + f(t_{N_1+1}) \\ \vdots \\ f(t_{N_1-1}) + f(t_{2N_1}) \end{pmatrix}$$

Notando que

$$\begin{pmatrix} f(t_0)+f(t_{N_1}) \\ \vdots \\ f(t_{N_1-1})+f(t_{2N_1}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{N_1} & \mathbb{1}_{N_1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} f(t_0) \\ \vdots \\ f(t_{N_1-1}) \\ f(t_{N_1}) \\ \vdots \\ f(t_{2N_1}) \end{pmatrix}}_{\vec{f}}$$

onde $\mathbb{1}_{N_1}$ é a matriz identidade de ordem N_1, podemos escrever

$$\begin{pmatrix} \vec{F}_+ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{N_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{N_1} & \mathbb{1}_{N_1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{f}$$

Por outro lado, para os termos ímpares

$$\begin{pmatrix} F(w_1) \\ F(w_3) \\ \vdots \\ F(w_{2N_1-1}) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1\cdot q^0 & 1\cdot q^1 & \cdots & 1\cdot q^{N_1-1} \\ 1\cdot q^0 & q^2\cdot q^1 & \cdots & (q^2)^{N_1-1}\cdot q^{N_1-1} \\ \vdots & \vdots & & \\ 1\cdot q^0 & (q^2)^{(N_1-1)} & \cdots & (q^2)^{(N_1-1)(N_1-1)} q^{N_1-1} \end{pmatrix}}_{(*)} \begin{pmatrix} f(t_0)-f(t_{N_1}) \\ f(t_1)-f(t_{N_1+1}) \\ \vdots \\ f(t_{N_1-1})-f(t_{2N_1}) \end{pmatrix}$$

onde:

$$(*) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & q^2 & \cdots & (q^2)^{N_1-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & (q^2)^{N_1-1} & \cdots & (q^2)^{(N_1-1)(N_1-1)} \end{pmatrix}}_{\mathbb{Q}_{N_1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & q & & \mathbb{O} \\ & & q^2 & \\ \mathbb{O} & & & \ddots \\ & & & & q^{N_1-1} \end{pmatrix}}_{\mathbb{D}_{N_1}}$$

Notando ainda que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t_0) - f(t_{N_1}) \\ \vdots \\ f(t_{N_1-1}) - f(t_{2N_1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{1}_{N_1} & -\mathbb{1}_{N_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t_0) \\ \vdots \\ f(t_{N_1-1}) \\ f(t_{N_1}) \\ \vdots \\ f(t_{2N_1}) \end{pmatrix}$$

podemos escrever

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vec{F}_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Q}_{N_1} \mathbb{D}_{N_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{1}_{N_1} & -\mathbb{1}_{N_1} \end{pmatrix} \vec{f}$$

Podemos então escrever

$$\begin{pmatrix} \vec{F}_+ \\ \vec{F}_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{Q}_{N_1} & 0 \\ 0 & \mathbb{Q}_{N_1}\mathbb{D}_{N_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{N_1} & \mathbb{1}_{N_1} \\ \mathbb{1}_{N_1} & -\mathbb{1}_{N_1} \end{pmatrix} \vec{f}$$

Definindo

$$p_0 = (1\ 0\ \ldots\ldots\ 0)$$
$$p_1 = (0\ 1\ 0\ \ldots\ldots\ 0)$$
$$\vdots$$
$$p_{N-1} = (0\ 0\ \ldots\ldots\ 1)$$

e a matriz $\mathbb{P}_N$ como

$$\mathbb{P}_N = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{N-2} \\ \hline p_1 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ & \cdots & & \cdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ & \cdots & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

vemos que

$$\begin{pmatrix} \vec{F}_+ \\ \vec{F}_- \end{pmatrix} = \mathbb{P}_N \vec{F} \quad , \quad \vec{F} = \mathbb{P}_N \begin{pmatrix} \vec{F}_+ \\ \vec{F}_- \end{pmatrix}$$

e como $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}_N^{-1}$,

$$\vec{F} = \mathbb{P}_N \begin{pmatrix} \mathbb{Q}_{N/2} & 0 \\ 0 & \mathbb{Q}_{N/2}\mathbb{D}_{N/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{N/2} & \mathbb{1}_{N/2} \\ \mathbb{1}_{N/2} & -\mathbb{1}_{N/2} \end{pmatrix} \vec{f}$$

$$= \mathbb{P}_N \begin{pmatrix} \mathbb{Q}_{N/2} & \mathbb{Q}_{N/2} \\ \mathbb{Q}_{N/2}\mathbb{D}_{N/2} & -\mathbb{Q}_{N/2}\mathbb{D}_{N/2} \end{pmatrix} \vec{f}$$

ou seja, a matriz de Fourier $\mathbb{Q}_N$ pode ser escrita como

$$\mathbb{Q}_N = \mathbb{P}_N \begin{pmatrix} \mathbb{Q}_{N/2} & \mathbb{Q}_{N/2} \\ \mathbb{Q}_{N/2}\mathbb{D}_{N/2} & -\mathbb{Q}_{N/2}\mathbb{D}_{N/2} \end{pmatrix}$$

ou ainda, lembrando que $\mathbb{Q}_N = (\mathbb{Q}_N)^T$, onde T denota transposição, e que $(\mathbb{A}\mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T\mathbb{A}^T$, temos

$$\mathbb{Q}_N = \begin{pmatrix} \mathbb{Q}_{N/2} & \mathbb{D}_{N/2}\mathbb{Q}_{N/2} \\ \mathbb{Q}_{N/2} & -\mathbb{D}_{N/2}\mathbb{Q}_{N/2} \end{pmatrix} \mathbb{P}_N^T$$