IV.3 PROPRIEDADES DAS TRANSFORMADAS DE FOURIER

Notação : $F(K) = \mathcal{F}[f(x)]$

1 TRANSLAÇÃO

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{F}[f(x-a)] &= e^{iKa} F(K) \\ \mathcal{F}[e^{-i\alpha x} f(x)] &= F(K-\alpha) \end{aligned}}$$

∴ a translação em um espaço equivale à multiplicação por uma exponencial (complexa) no espaço recíproco.

DEM:

$$\mathcal{F}[f(x-a)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x-a) e^{iKx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, f(x') e^{iK(x'+a)} = e^{iKa} F(K)$$

$$\mathcal{F}[e^{-i\alpha x} f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) e^{-i\alpha x} e^{iKx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) e^{i(K-\alpha)x} = F(K-\alpha)$$

✓

2 DERIVAÇÃO:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{F}[f'(x)] &= -iK F(K) \\ \mathcal{F}[x f(x)] &= -i F'(K) \end{aligned}}$$

∴ a derivação em relação à uma variável equivale à multiplicação pela outra variável do espaço recíproco.

DEM:

$$\mathcal{F}[f'(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f'(x)\, e^{iKx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)\, e^{iKx}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\,(iK)\, e^{iKx}$$

Fazendo a hipótese que

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0}$$

segue que

$$\mathcal{F}[f'(x)] = -iK\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty} dx\, f(x)\, e^{iKx} = -iK F(K)$$

Por outro lado

$$\mathcal{F}[x f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\, x e^{iKx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\,(-i)\frac{d}{dK} e^{iKx} = -i\frac{d}{dK} F(K)$$

A generalização dessas propriedades é óbvia:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{F}[f^{(n)}(x)] &= (-iK)^n F(K) \\ \mathcal{F}[x^n f(x)] &= (-i)^n F^{(n)}(K) \end{aligned}}$$

onde em $\mathcal{F}[f^{(n)}(x)]$ devemos supor $\lim_{x\to\pm\infty} f^{(K)}(x) = 0$ $(K=0,1,\dots,n-1)$.

<u>OBS</u>: É interessante notarmos que as propriedades de translação e derivação se unem através do teorema de Taylor; de fato, escrevendo $f(x-a)$ na forma de uma série de Taylor em torno de $x=a$,

$$f(x-a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(-a)^n$$

segue, da linearidade de $\mathcal{F}$,

$$\mathcal{F}[f(x-a)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!}\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n(-iK)^n}{n!} F(K) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iKa)^n}{n!}}_{e^{iKa}} F(K)$$

③ <u>IDENTIDADE DE PARSEVAL</u>

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) g^*(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dK\, F(K) G^*(K)}$$

<u>DEM</u>:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) g^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dK\, G(K) e^{-iKx}\right]^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} dK\, G^*(K) e^{iKx} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dK\, G^*(K) \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) e^{iKx} = \int_{-\infty}^{+\infty} dK\, G^*(K) F(K)$$

✓

Uma consequência muito importante desse resultado é:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dK\, |F(K)|^2}$$

sendo essa identidade também chamada <u>IDENTIDADE DE PARSEVAL</u>. Dessa forma, em outras palavras:

$$\boxed{\| f \|^2 = \| F \|^2}$$

(4) TEOREMA DA CONVOLUÇÃO

→ <u>DEF</u>: Definimos o <u>produto de convolução</u>, ou simplesmente <u>convolução</u>, das funções $f(x)$ e $g(x)$ como sendo a função $(f*g)(x)$ dada por

$$\boxed{(f*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, f(\xi)\, g(x-\xi)}$$

<u>OBS</u>: Supondo que as integrais abaixo existam e que podemos trocar a ordem de integração:

$$(f*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, f(\xi)\, g(\underbrace{x-\xi}_{\eta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} (-d\eta)\, f(x-\eta)\, g(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta\, g(\eta)\, f(x-\eta) = (g*f)(x)$$

ou seja,

$$\boxed{f*g = g*f}$$

☞ TEOREMA (CONVOLUÇÃO): Se $F(K) = \mathcal{F}[f(x)]$ e $G(K) = \mathcal{F}[g(x)]$, então:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{F}[f*g] &= \mathcal{F}[f]\,\mathcal{F}[g] \\ \mathcal{F}^{-1}[F*G] &= \mathcal{F}^{-1}[F]\,\mathcal{F}^{-1}[G] \end{aligned}}$$

OBS: logo o produto usual de funções em um espaço equivale ao produto de convolução no espaço recíproco.

DEM:

$$\mathcal{F}[(f*g)(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,(f*g)(x)\,e^{iKx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, f(\xi)\, g(\underbrace{x-\xi}_{\eta})\,e^{iKx}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, f(\xi)\,g(\eta)\,e^{iK(\eta+\xi)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta\, g(\eta)\,e^{iK\eta}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, f(\xi)\,e^{iK\xi} = G(K)F(K)$$

e a demonstração para $\mathcal{F}^{-1}[F*G]$ é completamente análoga

✓

OBS: Vamos denotar $\delta(x-a) = \delta_a(x)$. Então δ_0 faz o papel de unidade (a menos de constante) na convolução;

$$(\delta_0 * f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, \delta_0(\xi) f(x-\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)$$

enquanto $\delta_a *$ é uma translação:

$$(\delta_a * f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, \delta(\xi - a) f(x-\xi) = \frac{f(x-a)}{\sqrt{2\pi}}$$

5 PRINCÍPIO DE INCERTEZA DE HEISENBERG

Vamos usar a notação:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f^*(x) g(x)$$

Vamos definir

$$\bar{x} = \langle f, xf \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f^*(x)\, x\, f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x\, |f(x)|^2$$

$$\sigma_f^2 = \|(x-\bar{x})f\|^2 = \langle (x-\bar{x})f, (x-\bar{x})f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, (x-\bar{x})^2 |f(x)|^2$$

e de modo análogo:

$$\bar{K} = \langle F, KF \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dK\, F^*(K)\, K\, F(K) = \int_{-\infty}^{+\infty} dK\, K\, |F(K)|^2$$

$$\sigma_F^2 = \|(K-\bar{K})F\|^2 = \langle (K-\bar{K})F, (K-\bar{K})F \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dK\, (K-\bar{K})^2 |F(K)|^2$$

onde o uso da notação no caso da variável K se justifica graças à identidade de Parseval, que pode ser escrita agora como

$$\langle f, g \rangle = \langle F, G \rangle$$

Finalmente definimos

$$\Delta x = \frac{\sigma_f}{\|f\|} = \frac{\|(x-\bar{x})f\|}{\|f\|}$$

$$\Delta K = \frac{\sigma_F}{\|F\|} = \frac{\|(K-\bar{K})F\|}{\|F\|}$$

TEOREMA: Para Δx e ΔK acima definidos vale o chamado princípio da incerteza de Heisenberg:

$$\boxed{\Delta x \, \Delta K \geq \frac{1}{2}}$$

DEM: Primeiro vamos escrever σ_f e σ_F em termos de integrais no mesmo espaço. Vamos escrever σ_F em termos de x. Para isso vamos usar o fato que

$$\delta(K-K') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, e^{-i(K-K')x}$$

Logo:

$$\sigma_F^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dK\,(K-\bar{K})^2 |F(K)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dK \int_{-\infty}^{+\infty} dK'\,(K-\bar{K})(K'-\bar{K})\,F(K)F^*(K')\,\delta(K-K')$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dK\,(K-\bar{K})F(K)e^{-iKx} \int_{-\infty}^{+\infty} dK'(K'-\bar{K})\,F^*(K')\,e^{iK'x}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(i\frac{d}{dx}-\bar{K}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} dK\,F(K)e^{-iKx}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(i\frac{d}{dx}-\bar{K}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} dK'\,F(K')e^{-iK'x}\right]^*$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\left(i\frac{d}{dx}-\bar{K}\right)f(x)\right]\left[\left(i\frac{d}{dx}-\bar{K}\right)f(x)\right]^*$$

$$= \langle if' - \bar{K}f,\ if' - \bar{K}f \rangle$$

Vamos agora tomar o produto $\sigma_f^2\sigma_F^2$:

$$\sigma_f^2\sigma_F^2 = \langle (x-\bar{x})f,\ (x-\bar{x})f \rangle \langle if' - \bar{K}f,\ if' - \bar{K}f \rangle$$

Lembrando a desigualdade de Schwarz,

$$\langle \phi,\phi \rangle \langle \psi,\psi \rangle \geq |\langle \phi,\psi \rangle|^2$$

e

$$|z|^2 = (\mathrm{Re}\,z)^2 + (\mathrm{Im}\,z)^2 \geq (\mathrm{Im}\,z)^2 = \left[\frac{1}{2i}(z-z^*)\right]^2$$

podemos escrever

$$\langle \phi,\phi\rangle\langle \psi,\psi\rangle \geq \left[\frac{1}{2i}\left(\langle \phi,\psi\rangle - \langle \psi,\phi\rangle\right)\right]^2$$

onde usamos $\langle \phi,\psi\rangle^* = \langle \psi,\phi\rangle$. Vamos agora usar essa desigualdade para estimar $\sigma_f^2\sigma_F^2$. Temos:

$$\sigma_f^2\sigma_F^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\delta\right)^2$$

onde $(\phi = (x-\bar{x})f,\ \psi = if' - \bar{k}f)$:

$$\delta = \langle xf - \bar{x}f, if' - \bar{k}f\rangle - \langle if' - \bar{k}f, xf - \bar{x}f\rangle$$

$$= \langle xf, if'\rangle - \langle xf, \bar{k}f\rangle - \langle \bar{x}f, if'\rangle + \langle \bar{x}f, \bar{k}f\rangle$$
$$- \langle if', xf\rangle + \langle \bar{k}f, xf\rangle + \langle if', \bar{x}f\rangle - \langle \bar{k}f, \bar{x}f\rangle$$

Uma vez que $\bar{x}$ e $\bar{k}$ são constantes,

$$\langle \bar{x}f, \bar{k}f\rangle - \langle \bar{k}f, \bar{x}f\rangle = \bar{x}\bar{k}\langle f,f\rangle - \bar{k}\bar{x}\langle f,f\rangle = 0$$

e como $x \in \mathbb{R}$,

$$\langle \bar{k}f, xf\rangle - \langle xf, \bar{k}f\rangle = \bar{k}\langle f, xf\rangle - \bar{k}\langle f, xf\rangle = 0$$

Além disso:

$$\langle if', \bar{x}f\rangle - \langle \bar{x}f, if'\rangle = \bar{x}\langle if', f\rangle - \bar{x}\langle f, if'\rangle$$

$$= \bar{x}\int_{-\infty}^{+\infty} dx [if'(x)]^* f(x) - \bar{x}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f^*(x)\, if'(x) =$$

$$= -i\bar{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f'^*(x) f(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f^*(x) f'(x)\right]$$

$$= -i\bar{x}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, [f^*(x)f(x)]' = -i\bar{x}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, (|f(x)|^2)'$$

$$= -i\bar{x}\left[\lim_{x\to\infty} |f(x)|^2 - \lim_{x\to-\infty} |f(x)|^2\right] = 0$$

se supomos que

$$\lim_{x\to\pm\infty} |f(x)|^2 = 0$$

Desse modo,

$$\delta = \langle xf, if'\rangle - \langle if', xf\rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\; xf^*(x)\, if'(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, (if'(x))^* x f(x) =$$

$$= i\int_{-\infty}^{+\infty} dx\; x f^*(x) f'(x) + i\int_{-\infty}^{+\infty} dx\; f'^*(x)\, x f(x) =$$

$$= i\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x\left[f^*(x) f'(x) + f^{*\prime}(x) f(x)\right] =$$

$$= i \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x \left(|f(x)|^2\right)' = i\, x\, |f(x)|^2 \Big|_{-\infty}^{+\infty} - i \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |f(x)|^2$$

e supondo que $\lim_{x \to \pm\infty} |f(x)|^2 = 0$, segue

$$\delta = -i \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |f(x)|^2 = -i \|f\|^2$$

Portanto:

$$\sigma_f^2 \sigma_F^2 \geq \left(\frac{1}{2i} (-i) \|f\|^2 \right)^2 = \frac{\|f\|^4}{4}$$

$$\frac{\sigma_f^2}{\|f\|^2} \frac{\sigma_F^2}{\|f\|^2} \geq \frac{1}{4}$$

e da identidade de Parseval $(\|f\|^2 = \|F\|^2)$:

$$\frac{\sigma_f^2}{\|f\|^2} \cdot \frac{\sigma_F^2}{\|F\|^2} \geq \frac{1}{4}$$

ou, em termos de Δx e ΔK,

$$(\Delta x)^2 (\Delta K)^2 \geq \frac{1}{4}$$

que é o resultado procurado.

- INTERPRETAÇÃO

i) x = posição

$K = \dfrac{p}{\hbar} = \dfrac{\text{momentum}}{\text{constante (Planck)}}$ $\qquad \therefore \ \Delta x \, \Delta p \geq \dfrac{\hbar}{2}$

ii) x = tempo = t

K = frequência = $\omega = 2\pi\nu$ $\qquad \therefore \ \Delta t \, \Delta \nu \geq \dfrac{1}{4\pi}$

$\therefore$ quanto mais localizada a função em um espaço, menos localizada a função transformada no espaço recíproco. Vamos tomar como exemplo a gaussiana

$$f(x) = N e^{-\alpha x^2} \ (\alpha > 0) \quad , \quad F(K) = \frac{N}{\sqrt{2\alpha}} e^{-K^2/4\alpha}$$

Notemos que

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, x \, |f(x)|^2 = N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \underbrace{x \, e^{-2\alpha x^2}}_{\text{ímpar}} = 0$$

$$\sigma_f^2 = \|(x - \bar{x}) f\|^2 = \|x f\|^2 = N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, x^2 e^{-2\alpha x^2}$$

$$= N^2 \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{d}{d\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, e^{-2\alpha x^2} = \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{d}{d\alpha} \|f\|^2$$

mas:

$$\|f\|^2 = N^2\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-2\alpha x^2} = \frac{N^2}{\sqrt{2\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-y^2} = N^2\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}$$

$$\therefore\ \sigma_f^2 = \frac{-N^2}{2}\frac{d}{d\alpha}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\alpha^{-1/2}\right) = -\frac{N^2}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}\alpha^{-3/2}\right) = \frac{N^2}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{\alpha^{3/2}}$$

Escolhendo N de modo que $\|f\|^2 = 1$, ou seja:

$$N = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/4}$$

temos:

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{4\alpha} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{1}{\sqrt{4\alpha}}$$

com isso podemos escrever

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma_f^2)^{1/4}}\, e^{-x^2/4\sigma_f^2}$$

De modo análogo, $\overline{k} = 0$ e

$$\sigma_F^2 = \frac{1}{4\left(\frac{1}{4\alpha}\right)} = \alpha \Rightarrow \Delta K = \sqrt{\alpha}$$

$\therefore$

$$\Delta x \Delta K = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\sqrt{\alpha} = \frac{1}{2}$$

✓