(I) SÉRIES DE FOURIER

A série

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

é chamada uma <u>série trigonométrica</u>.

DEF: A série trigonométrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

é a <u>série de Fourier</u> da função $f(x)$ se os coeficientes forem dados por

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

➡ ALGUMAS QUESTÕES:

(i) a série converge?

(ii) qual o intervalo de convergência?

(iii) qual o tipo de convergência?

EX: convergência uniforme ⇒ $\forall \epsilon > 0$, $\exists N > 0$ tal que $|s_m(x) - s_n(x)| < \epsilon$ sempre que $m, n > N$, $\forall x \in I$ (onde $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$)

(iv) quais funções $f(x)$ são representáveis por essa série? Condições sobre $f(x)$?

! FATO NOTÁVEL ! (Fourier, Dirichlet, ...): as condições para representar uma função por uma série de Fourier são menos restritivas do que para séries de potências!

• OBS: $\{\cos nx, \sin nx\}$ = periódicas c/ $T = 2\pi$ ⇒

⇒ $f(x)$ = periódica: $f(x+2\pi) = f(x)$

EX $f(x) = x^2$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, x^2 = \frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, x^2 \cos nx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2 \cancelto{0}{\sin nx}}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, 2x \sin nx \right]$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left[-\frac{2x\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, 2\cos nx \right]$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left[-\frac{2\pi \cos n\pi}{n} + \frac{2(-\pi)\cos n(-\pi)}{n} + \frac{2}{n}\frac{\cancelto{0}{\sin nx}}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} \right]$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left[-\frac{4\pi}{n}\cos n\pi \right] = \frac{4}{n^2}(-1)^n \qquad (n>0)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, x^2 \sin nx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, 2x\cos nx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\cancel{\frac{-\pi^2 \cos n\pi}{n}} + \cancel{\pi^2 \frac{\cos n(-\pi)}{n}} + \frac{1}{n}\left[\frac{2x \cancelto{0}{\sin nx}}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \cancelto{0}{2\sin nx} \right]\right] = 0$$

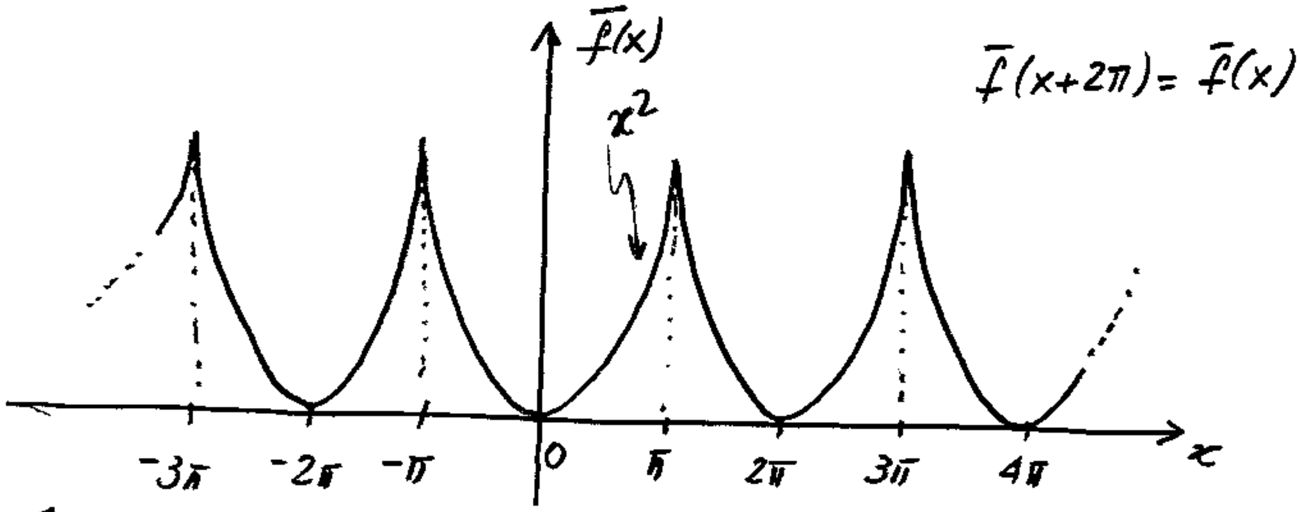
$$\therefore \quad x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

//

$\boxed{\text{OBS}}$ Essa série representa $f(x) = x^2$ para

$$\boxed{-\pi \leq x \leq \pi}$$

Para os demais pontos trata-se da extensão periódica de $f(x) = x^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$.



extensão periódica $\bar{f}(x)$ de $f(x)=x^2$ $(-\pi \le x \le \pi)$

$\boxed{EX}$ II

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (x<0) \\ +1 & (x \ge 0) \end{cases}$$

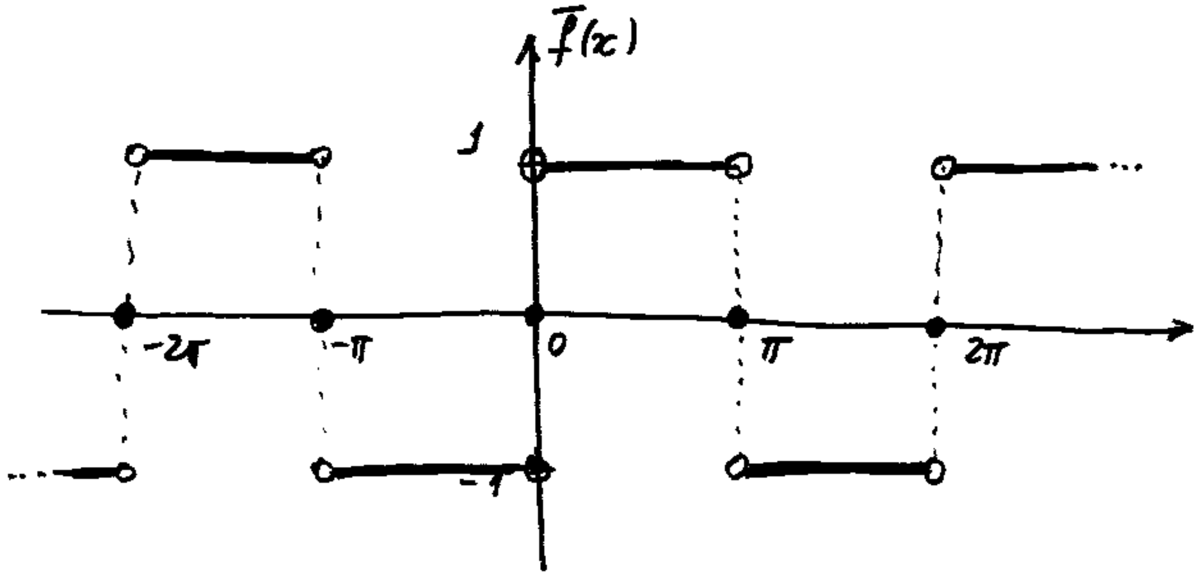
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x) = \frac{1}{\pi}\left[-\int_{\pi}^{0} dx + \int_{0}^{\pi} dx\right] = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)\cos nx = \frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0} dx\cos nx + \int_{0}^{\pi} dx\cos nx\right] = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)\sin nx = \frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0} dx\sin nx + \int_{0}^{\pi} dx\sin nx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx\sin nx = -\frac{2\cos nx}{n\pi}\Big|_{0}^{\pi} = -\frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{4}{n\pi}, & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

$$\therefore f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{K=0}^{\infty} b_{2K+1}\sin(2K+1)x = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{4}{(2K+1)\pi}\sin(2K+1)x \quad //$$



$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ 0, & x = 0, \pi, -\pi \\ -1, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$$\bar{f}(x + 2\pi) = \bar{f}(x)$$

$\boxed{\text{OBS}}$ $\bar{f}(0) \neq f(0)$, o que é característico do comportamento da série de Fourier em uma descontinuidade. Note que

$$\bar{f}(0) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 0^+} f(x) + \lim_{x \to 0^-} f(x)\right]$$

nesse caso (que se mostrará verdade no caso geral!)

2 → <u>DEF</u>: Seja $\mathcal{L}^2[a,b]$ o conjunto das funções de quadrado integrável em $a \leq x \leq b$. Dizemos que $f(x)$ e $g(x)$ são <u>ortogonais</u> nesse intervalo se

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 0}$$

• <u>OBS</u>: Lembrando que

$$0 \leq (f-g)^2 = f^2 + g^2 - 2fg \; ,$$

ou seja

$$2fg \leq f^2 + g^2 \; ,$$

concluímos que se $f, g \in \mathcal{L}^2[a,b]$, então existe $\int_a^b f(x) g(x) dx$.
Além disso,

$$(f+g)^2 = f^2 + g^2 + 2fg \leq 2(f^2 + g^2),$$

o que garante que $f+g \in \mathcal{L}^2[a,b]$. Como $\mathcal{L}^2[a,b]$ é um espaço vetorial, podemos pensar nessa integral como o produto escalar $\langle f, g\rangle$ de $f, g \in \mathcal{L}^2[a,b]$.

$$\boxed{\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx}$$

PROP.: O conjunto $\{1, \cos nx, \sin nx\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ é ortogonal em $[-\pi, \pi]$.

DEM: Devemos mostrar que

$$\text{(i)} \quad \int_{-\pi}^{\pi} dx \; 1 \cdot \cos nx = \int_{-\pi}^{\pi} dx \; 1 \cdot \sin nx = 0$$

$$\text{(ii)} \quad \int_{-\pi}^{\pi} dx \; \cos nx \cos mx = \int_{-\pi}^{\pi} dx \; \sin nx \sin mx = 0 \qquad (n \neq m)$$

$$\text{(iii)} \quad \int_{-\pi}^{\pi} dx \; \cos nx \sin mx = 0$$

As integrais (i) são triviais. Quanto a (ii) e (iii), elas são calculadas de forma análoga, de modo que faremos explicitamente apenas uma delas. Usando a identidade

$$\cos nx \cos mx = \frac{1}{2} \cos (n-m)x + \frac{1}{2} \cos (n+m)x$$

segue, para $n \neq m$, que

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos nx \cos mx = \frac{1}{2} \frac{\sin (n-m)x}{n-m} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} \frac{\sin (n+m)x}{n-m} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

pois $\sin k\pi = 0$ para $k =$ inteiro.

Não custa chamar a atenção para o fato que (iii) vale para quaisquer n e m, enquanto (ii) vale para $n \neq m$. Quando $n = m$, para (ii) temos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi$$

<u>TEOREMA</u>: Se uma série trigonométrica converge uniformemente para uma função $f(x)$ em $-\pi \leq x \leq \pi$, então ela é a série de Fourier de $f(x)$.

<u>DEM</u>: Se

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}{}' (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

converge uniformemente, o mesmo acontecerá com a série multiplicada por $\cos mx$ ou $\sin mx$. Como uma série uniformemente convergente pode ser integrada termo a termo, temos, por exemplo

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \, f(x) \cos mx = \frac{A_0}{2} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos mx}_{=0} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos nx \cos mx}_{=0 \ (n \neq m)} + B_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} dx \sin nx \cos mx}_{=0} \Big)$$

onde usamos a proposição anterior, de modo que

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x) \cos mx = A_m \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos^2 mx = \pi A_m ,$$

ou seja, A_m é um coeficiente de Fourier. Procedendo de forma análoga, veremos que o mesmo acontece com A_0 e B_m, de modo que se trata de uma série de Fourier.

I.2 MUDANÇA DE INTERVALO

Vamos agora, ao invés de $T = 2\pi$, considerar um período $T = 2L$. Para isso, na série de Fourier

$$f(x') = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx' + b_n \sin nx' \right) ,$$

vamos fazer a mudança de variável

$$\boxed{x' = \frac{\pi}{L} x}$$

Assim, para $f(x') = f\left(\frac{\pi}{L} x\right) = F(x)$, temos

$$\boxed{F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}{}' \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)}$$

com

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx' f(x') \cos n x' = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^{L} dx \cdot \frac{\pi}{L} f\left(\frac{\pi}{L} x\right) \cos \frac{n\pi x}{L}$$

ou seja,

$$\boxed{a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} dx \, F(x) \cos \frac{n\pi x}{L}} \quad , (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

e da mesma forma:

$$\boxed{b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} dx \, F(x) \sin \frac{n\pi x}{L}} \quad , (n = 1, 2, \ldots)$$

EX

$f(x) = x^2, \quad -2\pi \leq x \leq 2\pi$

Usando $L = 2\pi$ (portanto período $T = 4\pi$), encontramos que

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16(-1)^n}{n^2} \cos \frac{nx}{2}$$

//