MS211 - Turma D - Prova 2 - 07/07/2022

Nome: RA:

*Utilize* **4 dígitos decimais** *(quer dizer depois da vírgula) e arredondamento em todas as questões escrever os 0s depois do último dígito decimal não nulo! Boa prova!*

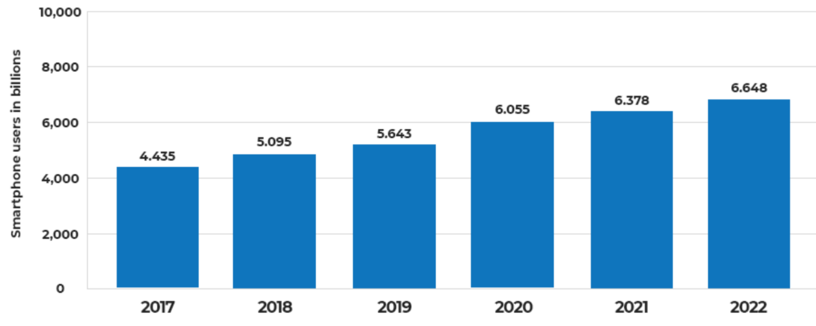
1. Considere o PVI

$$\begin{cases} y' + y &= x^2 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

(a) Aplique o método de Euler Aperfeiçoado em forma tabelar com $h = 0.5$ e preenche os espaços marcados com ... de uma tabela da forma seguinte seguinte colocando as fórmulas específicas para este problema particular. Qual é a aproximação obtida de $y(1)$? [1.75 pts]

| $x_k$ | $y_k$ | $y'_k = \ldots$ | $\bar{y}_{k+1} = y_k + y'_k h$ | $\bar{y}'_{k+1} = \ldots$ | $\Delta y_k \approx (y'_k + \bar{y}'_{k+1})\frac{h}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ |
| 0.5 | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ |
| 1 | $\ldots$ | | | | |

(b) Faça uma interpretação gráfica do primeiro passo, utilizado para obter $y_1$. Este gráfico deve incluir as tangentes dos ramos da solução envolvidos mas não precisa incluir nenhum ramo da solução da equação diferencial. Em outras palavras, o gráfico deve mostrar apenas algumas retas e pontos e explicar o que se faz com estas retas para obter $y_1$. [0.75 pts]




2. Considere os números de smartphones e as populações no mundo nos últimos 6 anos.

| Ano | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| População em bilhões | 7.55 | 7.63 | 7.71 | 7.79 | 7.87 | 7.94 |
| População $0-4$ anos em milhões | 674.7 | 676.4 | 677.4 | 677.9 | 684.6 | 686.1 |

Vamos assumir que a razão $r(t)$ de *usuários de smartphones entre pessoas com* $\geq 5$ *anos* no mundo exibe um crescimento logístico e pode ser aproximado por

$$r(t) \approx \frac{r_M}{1 + ce^{-k(t-t_0)}},$$

sendo $r_M = 1$ (correspondendo a 100%) a razão máximal de usuários de smartphones entre pessoas com $\geq 5$ anos de smartphones e $t_0 = 2017$.

(a) Utilize o Método dos Quadrados Mínimos para estimar $c$ e $k$. Exibe a matrizes $A$ e $B$ e os vetores $r$ e $b$ utilizados no processo. Para tanto, precisa-se "linearizar" o problema e encontrar dois valores que podem ser chamados $\alpha_1^*$ e $\alpha_2^*$. Quais são os valores obtidos $c^*$ e $k^*$? (Dica: Note que no primeiro lugar é necessário de calcular as razões de usuários de smartphones com $\geq 5$ anos em $2017, \ldots, 2022$.) [2.25 pts]

(b) Calcule o residuo do ajuste dado pela soma dos quadrados dos desvios referente ao problema "linearizado". [0.25 pts]

(c) Calcule o residuo do ajuste à função $r$ para $t = 2017, \ldots, 2022$ dado pela soma dos quadrados dos desvios. [0.25 pts]

(d) Utilize os valores $c^*$ e $k^*$ para estimar a percentagem de usuários de smartphones entre pessoas com $\geq 5$ anos no ano 2025. [0.25 pts]

| | |
|---|---|
| 2010 | 194 807 580 |
| 2011 | 196 621 490 |
| 2012 | 198 405 760 |
| 2013 | 200 168 784 |
| 2014 | 201 906 925 |
| 2015 | 203 624 771 |

3. Considere os dados da população brasileira acima. Estes dados se referem aos tamanhos da população no dia 01/01 as $0:00$ hs de cada ano.

   (a) Expresse os números de habitantes em milhões e utilize *interpolação quadrática inversa* com nós de interpolação apropriados para estimar a data em que o Brasil atingiu 200 milhões. (Dica: No primeiro lugar deve-se obter um valor no sistema decimal que deve ser convertido em uma data.) [2 pts]

   (b) Seja $q_2(200)$ o resultado do item (a) no sistema decimal. Estime o erro contido no resultado $q_2(200)$ usando o fato que na interpolação inversa por um poliômio de grau $\leq n$, tem-se que um limitante superior para $|E_n(y)|$ é aproximadamente dado por

$$\prod_{k=0}^{n} |y - y_k| \begin{pmatrix} \text{máximo do valor absoluto das} \\ \text{diferenças divididas de ordem } n+1 \end{pmatrix}$$

   Dica: No primeiro lugar, utilize valores no sistema decimal. A partir daí, determine um intervalo $[q_2(200) - E_2(200), q_2(200) + E_2(200)]$ no sistema decimal. Depois convirta este intervalo em um intervalo de datas. [1 pt]

4. Considere

$$\int_0^1 f(x)dx,$$

em que $f(x) = e^{-4x^2}$.

(a) Utilize a Regra 1/3 de Simpson Repetida com *2 subintervalos de interpolação* para obter um valor aproximado desta integral. Lembre-se que a regra 1/3 de Simpson repetida com $n+1$ nós de interpolação $(x_k, y_k) = (x_k, f(x_k)$ para $k = 0, \ldots, n$ fornece $S_n(f) =$

$$\frac{h}{3}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big).$$

[0.5 pts]

(b) Utilize a Quadratura Gaussiana com $n = 1$ para aproximar o valor de $\int_0^1 f(x)dx$. Lembre-se que a fórmula é dada por

$$G_1(f) = \frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{1}{2}\Big(a + b - \frac{b-a}{\sqrt{3}}\Big)\right) + f\left(\frac{1}{2}\Big(a + b + \frac{b-a}{\sqrt{3}}\Big)\right)\right].$$

[0.5 pts]

(c) Interprete gráficamente o que acontece no item (c). Este desenho deve incluir os nós de interpolação utilizados. Qual é a área utilizada para estimar o valor de $\int_0^1 f(x)dx$? [0.5 pts]