Cálculo Numérico (MS211) PROVA 2 (16/12/2014)

Nome: ______________________ RA: __________ Turma: B

Trabalhe com *radianos* e com pelo menos 4 *dígitos decimais*! Justifique as suas respostas!

---

1. Considere a população de raposas, denotada por r, e a população de lebres, denotada por l, numa ilha isolada como funções do tempo t. Estas populações podem ser modeladas pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} r' &= -0.5r + 0.0001rl \\ l' &= 0.5l - 0.0001rl \end{cases}$$

Considere as condições iniciais $r(0) = 8000$ e $l(0) = 10000$.

(a) Transforme este problema em um PVI vetorial. [0.5 pts]

(b) Aplique o método de Euler Aperfeiçoado em forma tabelar com $h = 0.5$ para estimar as populações no tempo $t = 0.5$. Quais são os valores encontrados das populações das espécies das raposas e dos lebres? [1.5 pts]

2. Considere o PVC seguinte:

$$\begin{cases} 0.04y'' + 0.8y' + 100y = x \\ y(1) = 0 \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

(a) Seja $h = 0.2$. Utilizando aproximações das derivadas que garantem erro de truncamento de ordem quadrática em h, determine a matriz dos coeficientes A e o vetor constante b que descrevem o sistema linear resultante. [1.5 pts]

(b) Verifique que tanto o método de Gauss-Jacobi quanto o método de Gauss-Seidel tem convergncia garantida para qualquer chute incial em aplicações ao sistema linear $Ay = b$. [1 pt]

(c) Seja h pequeno. Visto o fato que um bom chute inicial pode ser obtido fácilmente (por ex., $y_k = 0.01x_k$ para $k = 1, \ldots, n-1$), quais são as vantagens de aplicar Gauss-Jacobi ou Gauss-Seidel a este problema? [0.5 pts]

3. A tabela seguinte mostra (valores aproximados de) temperaturas médias anuais globais em graus Celsius.

Ano t	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Temp. em Graus	13.86	13.94	14.13	14.29	14.30	14.56

(a) Seja $x = \frac{t-1960}{10}$. Utilize o método dos quadrados mínimos para ajustar uma curva da forma $T + Re^{kx}$ aos dados da tabela. Aqui T se refere à temperatura média anual global sem atividade económica. Pode-se assumir que $T = 13.67$ graus Celsius. [2 pts]

(b) Qual é o erro obtido neste ajuste? Em outras palavras, qual é a norma euclidiana do resíduo? [0.5 pts]

(c) Utilize o seu resultado para estimar a temperatura média anual global em 2020. [0.5 pts]

4. A função Γ satisfaz $\Gamma(n+1) = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(a) Utilize a forma de Newton (ou a forma de Lagrange) da interpolação quadrática para estimar $\Gamma(3.2)$. [1.5 pts]

(b) Utilize a regra de Simpson para estimar $\int_2^4 \Gamma(x)dx$. [0.5 pts]

ALGUMAS FÓRMULAS E TABELAS

$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$

$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$

$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3}),\ x = \phi(t) = \frac{1}{2}[a + b + t(b-a)]$

x	y	$y' = f(x,y)$	$\Delta y \approx y'h$

x	y	$y' = f(x,y)$	y''	$\Delta y \approx y'h + y''\frac{h^2}{2}$

x_k	y_k	$y'_k = f(x_k, y_k)$	$\bar{y}_{k+1} = y_k + y'_k h$	$\bar{y}'_{k+1} = f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1})$	$\Delta y_k \approx (y'_k + \bar{y}'_{k+1})\frac{h}{2}$

k	$x^{(k)}$	$F(x^{(k)})$	$\|\|F(x^{(k)})\|\|_\infty$	$\|\|s^{(k-1)}\|\|_\infty$	$s^{(k)}$

$$y'(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{h}\ ;\ \ y'(x_k) \approx \frac{y_k - y_{k-1}}{h}\ ;\ \ y'(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}\ ;\ \ y''(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}.$$