Cálculo Numérico (MS211) PROVA 1 (21/10/2014)

Nome: ______________________ RA: __________ Turma: B

Trabalhe com *radianos* e 4 *dígitos decimais* exceto na Questão 2!
JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS RESPOSTAS!!! **Boa sorte!**

---

1. Considere a função $f(x) = x^2 e^x - 1$.

   (a) Mostre que a equação $f(x) = 0$ possui um zero real no intervalo $[0, 1]$. [0.5 pts]

   (b) Use o método de Newton-Raphson com $x_0 = 0.7$ para obter uma aproximação de um zero de f em $[0, 1]$, com precisão igual a 0.01. Preenche uma tabela da forma em baixo. [1.5 pts]

   (c) Existe algum chute inicial $x_0 > 0$ no qual o método de Newton-Raphson não pode ser aplicado? [0.5 pts]

   (d) Seja (x_k) a sequência gerada pelo método de Newton-Raphson e seja ξ o limite de (x_k). Qual é relação entre x_k, x_{k+1} e ξ que determina a ordem de convergência de (x_k)? [0.5 pts]

k	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$

2. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 0.100 \cdot 10^{-4} & 0.100 \cdot 10^{0} \\ 0.100 \cdot 10^{0} & 0.200 \cdot 10^{0} \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0.100 \cdot 10^{0} \\ 0.000 \cdot 10^{-9} \end{pmatrix}.$$

   Considere uma maquina que opera no sistema de ponto flutuante utilizando arredondamento com $\beta = 10$, $t = 3$ dígitos na mantissa e um expoente em $[-9, 9]$.

   (a) Resolva $Ax = b$ utilizando Eliminação Gaussiana *sem pivoteamento parcial* nesta maquina. [1 pt]

   (b) Providencie os detalhes da operação aritmética (neste caso, da subtração) que produziu um erro numérico. Utilize o esquema apresentado na aula. [0.5 pts]

   (c) Seja $\tilde{x}$ a resposta obtida no item (a). Calcule a norma infinita do resíduo dado por $||A\tilde{x} - b||_\infty$. Interprete $||A\tilde{x} - b||_\infty$. Quais são as razões porque $||A\tilde{x} - b||_\infty$ é grande? O que pode ser feito para melhorar a qualidade do resultado final usando a mesma maquina? [1 pt].

3. A fatoração LU com pivoteamento parcial de uma determinada matriz A nos deu o seguinte resultado:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Usando **somente** o resultado acima, isto é, sem fazer os cálculos para obter a matriz A, determine:

   (a) a solução do sistema $Ax = b$, onde $b = (3, -7, -8)^T$; [1.5 pts]

   (b) $\det(A)$. [0.5 pts]

4. Considere o sistema não-linear:

$$\begin{cases} x_1^3 - x_2 &= 0 \\ x_1^2 + x_2^2 &= 4 \end{cases}.$$

   (a) Localize graficamente os zeros do sistema. [0.5 pts]

   (b) Dado $x^{(0)} = (1.2, 1.6)^T$ e precisão igual a 0.05, obtenha uma aproximação para a solução do sistema pelo método de Newton.
   Providencie detalhes e verifique se um dos 2 critérios de parada está satisfeito preenchendo a tabela seguinte (Lembre-se que $||v||_\infty = \max_{1 \le i \le 2} |v_i|$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$): [2 pts]

k	$x^{(k)}$	$F(x^{(k)})$	$\lvert\lvert F(x^{(k)}) \rvert\rvert_\infty$	$\lvert\lvert s^{(k-1)} \rvert\rvert_\infty$	$s^{(k)}$