MS211 - Turma E - Prova 1 - 27/06/2023

Nome: RA:

Utilize **4 digitos decimais** em todas as questões! Não precisa escrever zeros não significativos. (Por exemplo, pode escrever 0.5 ao invés de 0.5000.) Somente faça o que está pedido. **Justifique as suas respostas!** Boa prova!

1. A fatoração LU é comunemente utilizada no método de Newton Modificado para resolver sistemas de equações não-lineares que podem ser expressados na forma $F(\mathbf{x}) = (0, 0, \ldots, 0)^T$. Considere o chute inicial $\mathbf{x}^{0)} = (0.2, 0, -0.5)^T$ e a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0.2x_1x_2 + 20x_3 + \frac{10\pi-3}{3} \\ 3x_1 - 0.2x_3(x_2+1) - \frac{1}{2} \\ x_1^2 - 81(x_2+0.1)^2 + \sin(x_3) + 1.06 \end{pmatrix}.$$

A matriz jacobiana de F no ponto $\mathbf{x}^{0)}$ é dada por

$$J(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0.2x_2 & 0.2x_1 & 20 \\ 3 & -0.2x_3 & -0.2(x_2+1) \\ 2x_1 & 162(x_2+0.1) & \cos(x_3) \end{pmatrix}.$$

e a fatoração com pivoteamento dela é

(a) Avalie $J(\mathbf{x}^{(0)})$ em $\mathbf{x}^{0)} = (0.2, 0, -0.5)^T$. [0.25 pts]

(b) É possivel de determinar a fatoração LU SEM pivoteamento de $J(\mathbf{x}^{(0)})$? Justifique a sua resposta? [0.25 pts]

(c) Determine a fatoração LU COM pivoteamento de $J(\mathbf{x}^{(0)})$ usando o vetor p e as matrizes $R^{(i)}$ e $R^{(i)'}$ como ensinado na aula. Quais são as matrizes L, U e P resultantes? [1.5 pts]

(d) Qual é a relação entre $J(\mathbf{x}^{(0)})$ e as matrizes L, U e P obtidas? [0.25 pts]

2. Considere

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obviamente $A\mathbf{x} = b$ se e somente se $\mathbf{x} = (0,0)^T$.

(a) Verifique se o critério das linhas está satisfeito. Quais são as consequências para a convergência de cada um dos métodos seguintes?

i. O método de (Gauss-)Jacobi;

ii. O método de Gauss-Seidel.

[0.5 pts]

(b) Seja $\mathbf{x}^{(0)} = (1,2)^T$. Aplique 2 iterações do método de (Gauss-)Jacobi e gere $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ usando a fórmula $\mathbf{x}^{(k+1)} = C\mathbf{x}^{(k)} + g$ para algum $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ e algum $g \in \mathbb{R}^2$. Qual é a sua conclusão referente à convergência de $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$? [0.5 pts]

(c) Verifique se o critério de Sassenfeld está satisfeito. O que você pode afirmar referente às consequências do seu resultado para os métodos seguintes?

i. O método de (Gauss-)Jacobi;

ii. O método de Gauss-Seidel.

[0.5 pt]

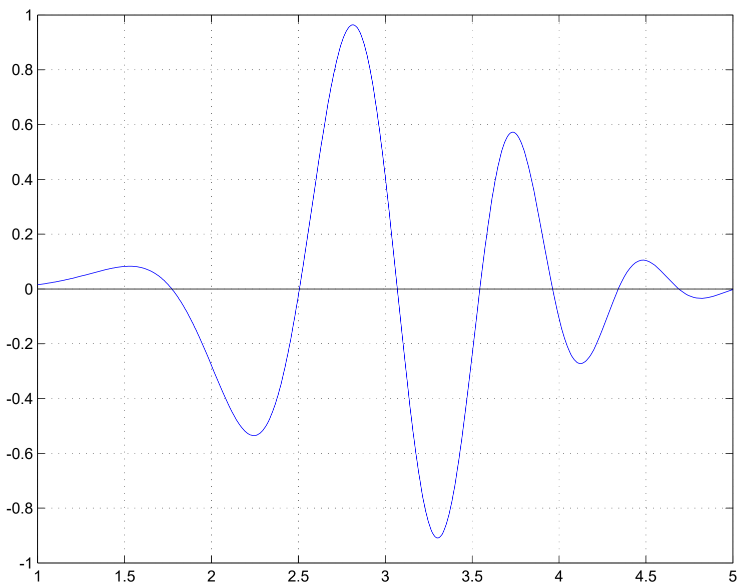
(d) Utilize a matriz C e o vetor g do item (b) para gerar $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ aplicando o método de Gauss-Seidel ao sistema $A\mathbf{x} = b$ com chute inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (1,2)^T$. Exibe os vetores intermediários. Qual é a sua conclusão referente à convergência do método de Gauss-Seidel neste caso? [1 pt]

(e) Faça uma interpretação gráfica do item anterior mostrando as retas, os pontos e as transições do ponto anterior para o próximo. As referidas transições devem ser visualizadas usando flechas. [0.5 pt]

3. A técnica chamada “zero-crossing”é um dos métodos que permite avaliar o tempo de atraso da propagação de ondas. Tendo em vista esta observação, considere um sinal de onda dado pela equação seguinte:

$$e^{-(x-3)^2}\sin(x^2) = 0. \tag{1}$$

A figura em baixo mostra o gráfico de $f(x) = e^{-(x-3)^2}\sin(x^2)$ no intervalo $[1, 5]$.



(a) Faça uma interpretação gráfica de uma iteração do método de Newton-Raphson com chute inicial $x_0 = 3$ e obtenha x_1 gráficamente. [0.25 pts]

(b) Suponha que o método de Newton-Raphson é aplicado usando o critério de parada $|f(x_k)| < 0.1$ ou $|x_k - x_{k-1}| < 0.1$. Quantas iterações são necessários até este critério de parada é atingido segundo o seu gráfico? Justifique a sua resposta. [0.25 pts]

(c) Considerando o chute inicial $x_0 = 3$ e $\varepsilon = 10^{-1}$, execute o método de Newton-Raphson até $|f(x_k)| < \varepsilon$ ou $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ e preenche a tabela em baixo. Exibe os detalhes necessários, em particular $f'(x)$ e a fórmula utilizada para gerar x_{k+1} a partir de x_k. Sugere-se simplificar as expressões obtidas. [1.5 pts]

k	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	3		$-$
1			

(d) Sob certas condições, sabe-se que o método de Newton-Raphson produz uma sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que converge com ordem pelo menos quadrática para uma raíz ξ de f. Qual é o significado da afirmação que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge com ordem de convergência quadrática para ξ? [0.25 pts]

4. Considere o problema de encontrar os valores de x e y que minimizem a função

$$f(x,y) = (x-y)^2 + [x^2 + 2 - 2y]^2.$$

Seja $\mathbf{z} = (x,y)^T$. Sugere-se resolver o sistema não-linear seguinte:

$$\begin{cases} g_1(\mathbf{z}) = g_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0 \\ \\ g_2(\mathbf{z}) = g_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Seja $G(\mathbf{z}) = (g_1(\mathbf{z}), g_2(\mathbf{z}))^T$.

(a) Determine as derivadas parciais na equação em cima e escreve o sistema não-linear por extenso. [0.25 pts]

(b) Utilizando o item anterior, execute 1 passo do método de Newton com a aproximação inicial $\mathbf{z}^{(0)} = (x_0, y_0)^T = (1,1)^T$ e preenche os $\ldots$ na tabela seguinte. Explique como você fez as contas, em particular qual é a matriz Jacobiana $J(\mathbf{z}) = J(x,y)$ e como foram obtidos $\mathbf{s}^{(0)}$ e $\mathbf{z}^{(1)}$. Verifique que $||G(\mathbf{z}^{(1)})||_\infty = 0$. [1.75 pts]

k	$\mathbf{z}^{(k)}$	$G(\mathbf{z}^{(k)})$	$\|\|G(\mathbf{z}^{(k)})\|\|_\infty$	$\|\|\mathbf{s}^{(k-1)}\|\|_\infty$	$\mathbf{s}^{(k)}$
0	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$-$	$\ldots$
1	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	

(c) A figura em baixo mostra os gráficos das funções $p(x) = x^2 + 2$ e $r(x) = 2x$. Marque as localizações dos pontos $(x_1^{(1)}, (x_1^{(1)})^2)$ e $(y_1^{(1)}, 2y_1^{(1)})$, sendo $x_1^{(1)}$ e $y_1^{(1)}$ as entradas de $\mathbf{z}_1^{(1)}$ obtido no item anterior.
Qual é a sua observação referente a estes dois pontos? Justifique a sua resposta. [0.5 pt]