MS211 - Turma D - Prova 1 - 17/05/2022

Nome: RA:

*Utilize* **5 dígitos decimais** *(quer dizer depois da vírgula) e arredondamento em todas as questões* **exceto na Questão 1 que deve ser feito usando frações** *e sem calculadora! Não precisa escrever os 0s depois do último dígito decimal não nulo! Boa prova!*

1. Considere a seguinte matrix $A$ e o seguinte vetor $b$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} -34 \\ 10 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

   (a) Se for possivel, determine a fatoração LU sem pivoteamento da matriz $A$. Caso contrário, justifique porque $A$ não admite uma fatoração LU sem pivoteamento. [0.25 pts]

   (b) Determine as matrizes $L$, $U$ e $P$ da fatoração LU com pivoteamento parcial de $A$. [1.25 pts]

   (c) Utilize $L$, $U$ e $P$ para determinar a solução de $Ax = b$ através da resolução de dois sistemas triangulares. [0.75 pt]

   (d) De modo geral, em que situação é interessante determinar uma fatoração LU de uma matriz A? Justifique a sua resposta. [0.25 pts]

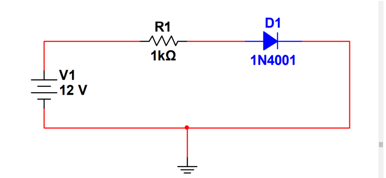


Fig. 7. Circuito Não Linear.

2. Considere um circuito elétrico a diodo tal que
   - $R$, a tensão da resistência, é $1000\Omega$.
   - $V_B$, a voltagem da bateria, é 12 V.

   Seja $i = I_S(e^{cv} - 1)$, sendo
   - $I_S$ a intensidade de corrente de saturação reversa, cujo valor típico é $10^{-9}$ ampere,
   - a constante $c = 40$.

   A tensão no circuito é o zero da seguinte função $f$:

   $$f(v) = iR + v - V_B.$$

   (a) Explique brevemente porque $f$ possui uma única raiz $\xi$. [0.25 pts]

   (b) Explique brevemente usando os seus conhecimentos de cálculo porque $f'$ e $f''$ existem e são contínuas e porque $f'(\xi) \neq 0$. [0.25 pts]

   (c) Qual é a definição matemática da ordem de convergência de uma sequência convergente $(x_k)$? Em outras palavras, utilize fórmulas para explicar o significado da afirmação que a ordem de convergência de $(x_k)$ é $p$. Qual é a ordem de convergência de uma sequência $(x_k)$ gerada pelo método de Newton-Raphson sob condições normais, quer dizer, se as condições do teorema apresentado na aula são satisfeitas? [0.5 pts]

   (d) Aplique o método de Newton-Raphson com $v_0 = 0.4$ (V) e $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-3}$ e coloque os resultados na tabela seguinte. Mostre $f'$ e a fórmula que você usou para gerar $v_{k+1}$ a partir de $v_k$. O resto segue das suas entradas na tabela. Pare quando $|f(v_k)| < \varepsilon$ ou $|v_k - v_{k-1}| < \varepsilon$. Explique porque parou e qual é a aproximação obtida da tensão no circuito. [1.5 pts]

| $k$ | $v_k$ | $f(v_k)$ | $\lvert v_k - v_{k-1}\rvert$ |
|---|---|---|---|
| 0 | | | – |
| 1 | | | |
| 2 | | | |

3. (a) Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 2$. Determine a matriz Jacobiana $J(\mathbf{x})$ da seguinte função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ [0.5 pts]:

$$F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_i(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_{n-1}(\mathbf{x}) \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1^2 + 3x_1 - 2x_2 - 1 \\ x_1 + 2x_2^2 + 3x_2 - 2x_3 - 1 \\ \vdots \\ x_{i-1} + 2x_i^2 + 3x_i - 2x_{i+1} - 1 \\ \vdots \\ x_{n-2} + 2x_{n-1}^2 + 3x_{n-1} - 2x_n - 1 \\ x_{n-1} + 2x_n^2 + 3x_n - 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Verifique se as afirmações seguintes são verdadeiras:

i. Se $x_1, \ldots, x_n > 0$, então $J(\mathbf{x})$ satizfaz o critério das linhas. [0.75 pts]

ii. Se $x_1, \ldots, x_n \geq 0$, então $J(\mathbf{x})$ satizfaz o critério de Sassenfeld. [0.75 pts]

(c) Seja $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n_+$, quer dizer, $x_i^{(0)} > 0 \ \forall i = 1, \ldots, b$. Quais as consequências das suas observações do item (b) para a convergência do

i. método de Jacobi,

ii. método de Gauss-Seidel,

na sua aplicação para resolver um sistema linear da forma $J(\mathbf{x}^{(0)})\mathbf{t} = -F(\mathbf{x}^{(0)})$ usando qualquer chute incial $\mathbf{t}^{(0)}$? [0.25 pts]

(d) Seja $\mathbf{x}^{(0)} = (0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$. Quais as consequências das suas observações do item (b) para a convergência do

i. método de Jacobi,

ii. método de Gauss-Seidel,

na sua aplicação para resolver um sistema linear da forma $J(\mathbf{x}^{(0)})\mathbf{t} = -F(\mathbf{x}^{(0)})$ usando qualquer chute incial $\mathbf{t}^{(0)}$? [0.25 pts]

4. Considere o seguinte sistema não-linear:

$$\begin{cases} 2x_1^2 + 3x_1 - 2x_2 & = 1 \\ x_1 + 2x_2^2 + 3x_2 - 2x_3 & = 1 \\ x_2 + 2x_3^2 + 3x_3 & = 1 \end{cases}$$

Seja $\mathbf{x}^{(0)} = (0.4, 0.3, 0.2) \in \mathbb{R}^3$ tal que $\varepsilon = 10^{-3}$. Obtenha uma aproximação para a solução do sistema pelo método de *Newton*. Providencie detalhes. Pare se um dos 2 critérios de parada está satisfeito, quer dizer, assim que $||F(\mathbf{x}^{(k)}||_\infty < \varepsilon$ ou $||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}||_\infty < \varepsilon$, e preenche a tabela seguinte (Lembre-se que $||\mathbf{v}||_\infty = max_{1 \le i \le n}|v_i|$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$). Exibe todos os passos que devem ser feitos usando 5 dígitos decimais. Escreve os sistemas lineares que precisam ser resolvidos e as soluções encontradas em cada iteração. Qual é a aproximação obtida de uma solução do sistema não-linear? [2.5 pts]

| $k$ | $x^{(k)}$ | $F(x^k)$ | $\|\|F(x^k)\|\|_\infty$ | $\|\|s^{(k-1)}\|\|_\infty$ | $s^{(k)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix}$ | | | $-$ | |
| 1 | | | | | |