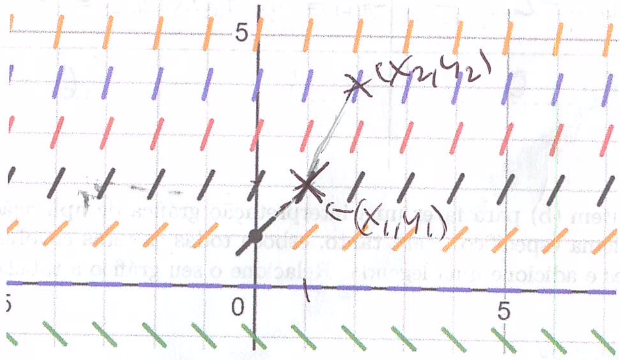
Gabarito, E, P2

MS211 - Turma E - Prova 2 - 28/11/2023

Nome: RA:

Utilize **4 digitos decimais** em todas as questões! Não precisa escrever zeros não significativos. (Por exemplo, pode escrever 0.5 ao invés de 0.5000.) Somente faça o que está pedido. **Justifique as suas respostas!** Boa prova!

1. (a) Considere o campo de direções visualizado na figura seguinte:



Este campo de direção se refere a uma equação diferencial ordinária da forma $y' = f(x, y)$. Considere a condição inicial $y(0) = 1$.

Utilize a figura para executar dois passos do método de Euler gráficamente com tamanho do passo $h = 1$. Marque os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2). O que é o significado de y_1 e y_2? Utilize o seu gráfico para estimar y_1 e y_2. [0.5 pt]

Vire a página!

(a) $y(1) \approx y_1$,

$y_1 \approx y(1)$, $y_2 \approx y(2)$

Pelo gráfico, $y_1 = 2$ e $y_2 = 4$

(b) Considere o seguinte PVI:

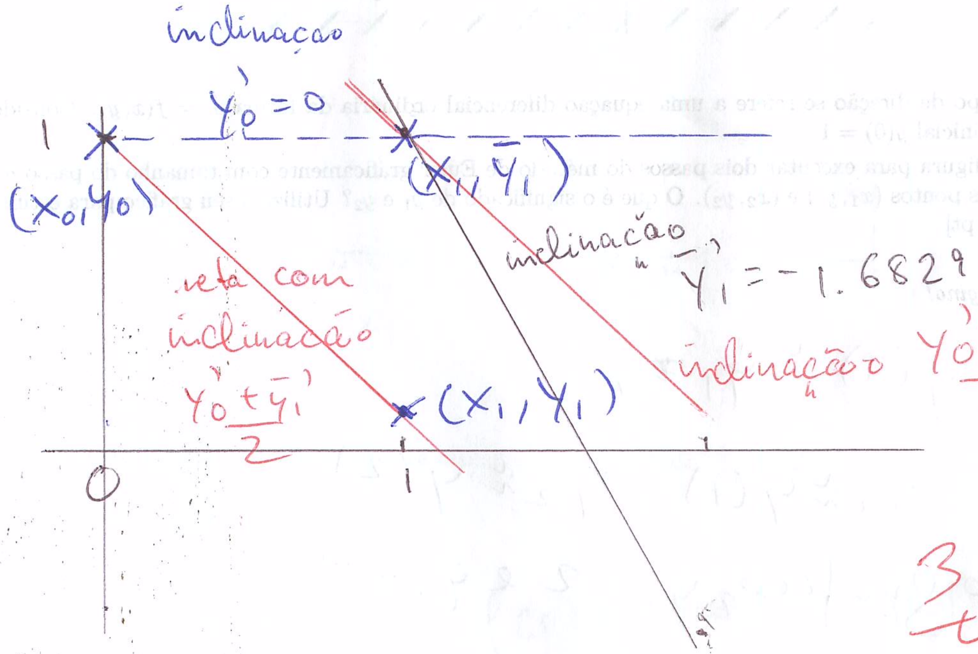
$$\begin{cases} y' &= -2\frac{\sin(x)}{y} \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

Aplique o método de Euler Aperfeiçoado em forma tabelar com $h = 1$ e preenche os espaços marcados com . . . da tabela da forma seguinte. Se for pertinente, utilize a fórmula específica para este problema particular no cabeçalho. [1.25 pts]

x_k	y_k	$y'_k = -2\frac{\sin(x_k)}{y_k}$	$\bar{y}_{k+1} = y_k + y'_k h$	$\bar{y}'_{k+1} = -2\frac{\sin(x_{k+1})}{\bar{y}_{k+1}}$	$\Delta y_k = \frac{y'_k + \bar{y}'_{k+1}}{2} h$
0	1	0	1	−1.6829	−0.8415
1	0.1585				

$\frac{1}{4}$

(c) Utilize a tabela do item (b) para fazer uma interpretação gráfica da aplicação do método de Euler Aperfeiçoado neste problema específico. Para tanto, esboçe todas as retas envolvidas. Marque os pontos relevantes usando cruzes e adicione uma legenda. Relacione o seu gráfico à tabela do item (b). [0.75 pt]



$\frac{3}{4}$

(e) 05/24 ≙ mês 41
Média mensal de CO_2 em 05/24
$\approx 418.8439 + 0.2017 \cdot 41 - \cancel{1.577}\, 1.5778 \cos\left(\frac{41\pi}{6}\right) + 3.1781 \sin\left(\frac{41\pi}{6}\right)$

$= 426.0691$

$\frac{1}{4}$

(a) O método dos Quadrados Mínimos é um método de otimização projetado para encontrar certos parâmetros que minimizam uma função que pode ser expressado em termos de uma matriz A e um vetor.

i. Qual é este vetor no problema específico de ajuste de curvas mencionado em cima? (Escreve o vetor, incluindo todas as entradas em termos de números reais) [0.25 pt]

ii. Qual é esta matriz A no problema específico de ajuste de curvas mencionado em cima? (Escreve a matriz, incluindo todas as entradas em termos de números reais) [0.5 pt]

iii. Escreve a expressão do problema de otimização mencionado acima sem usar números. [0.25 pt]

(b) Como se resolve o referido problema de otimização? Em outras palavras, como se encontra os parâmetros que representam a solução do problema. Não é necessário fazer contas. [0.5 pt]

(c) Suponha que você já resolveu o problema e encontrou a solução

$$\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*, \alpha_4^*)^T = (414.8439, 0.2017, -1.5778, 3.1781)^T.$$

(d) Calcule o resíduo do ajuste resultante dado pela soma dos quadrados dos desvios. [0.5 pts]

(e) Utilize os valores $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*, \alpha_4^*$ para estimar a a média mensal de dióxido de carbono em locais de superfície marinha nos meses de julho de 2023 e maio de 2024. [0.5 pts]

(a) (i) Este vetor é $y = \begin{pmatrix} 415.49 \\ 419.09 \\ 413.26 \\ 418.13 \\ 420.97 \\ 415.91 \\ 424.00 \\ 418.51 \end{pmatrix}$, (ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0.866 & 0.5 \\ 1 & 5 & -0.866 & 0.5 \\ 1 & 9 & 0 & -1 \\ 1 & 13 & 0.866 & 0.5 \\ 1 & 17 & -0.866 & 0.5 \\ 1 & 21 & 0 & -1 \\ 1 & 25 & 0.866 & 0.5 \\ 1 & 29 & -0.866 & 0.5 \\ 1 & 33 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$

(iii) Procuramos $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*, \alpha_4^*)^T$ tal que

$$\|A\alpha^* - y\|_2^2 = \min_{\alpha \in \mathbb{R}^4} \|A\alpha - y\|_2^2$$

$\frac{1}{4}$

(b) Resolvemos $A^T A \alpha = A^T y \rightsquigarrow \alpha^*$ $\frac{1}{2}$

(d) O resíduo é $\|A \cdot \alpha^* - y\|_2^2$

$= (\overset{415.2682}{\cancel{414.8439}} - 415.49)^2 + \ldots + (418.3219 - 418.51)^2$

$= 0.9937$ $\frac{1}{2}$

(e) $\overset{7}{08}$/23 ≙ mês 31, neste mês a média mensal de CO

$\approx 418.8439 + 0.2017 \cdot 31 - 1.5778 \cdot \cos\left(\frac{31\pi}{6}\right) + 3.1781 \sin(3$

$= 420.8740$ $\frac{1}{4}$

3. Uma distribuição normal com média 0 e variânça 1 é dada por

$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Seja

$$I(x) = \int_0^x N(t)dt.$$

Seguem alguns valores tabelados de $I(x) = \int_0^x N(t)dt$ para diferentes $x > 0$:

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5
$I(x) = \int_0^x N(t)dt$	0	0.1915	0.3413	0.4332	0.4772	0.4938

(a) Utilize interpolação polinomial *quadrática* usando a forma de Newton e os nós de interpolação mais apropriados para estimar $I(0.6)$. Lembre-se que [1 pt]

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \ldots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}).$$

(b) Estime um limitante superior para o erro da sua estimativa do item anterior usando o fato que $|E_n(x)|$ é geralmente dado por

$$|E_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right|,$$

em que

$$M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Note que você precisa aplicar esta fórmula no caso especial descrito no item (a). Pode utilizar o fato que $I^{(3)}$, quer dizer a 3a derivada de I, é crescente em $[0, \sqrt{3}]$. [0.75 pt]

(c) Utilize interpolação polinomial *quadrática inversa* usando a forma de Newton e os nós de interpolação mais apropriados para estimar o número η tal que $I(\eta) = 0.4$. [1.25 pt]

(a)

x	Ordem 0	1	2
0	0		
		0.3830	
0.5	0.1915		−0.0834
		0.2996	
1	0.3413		

$\therefore p_2(x) = 0 + 0.383 \cdot x \cancel{(x-0.5)} - 0.0834 \times (x-0.5)$

$\Rightarrow p_2(0.6) = 0.383 \cdot 0.6 - 0.0834 \cdot 0.6 \cdot 0.1 = 0.2248$

Portanto, $I(0.6) \approx p_2(0.6) = 0.2248$

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$

3. Uma distribuição normal com média 0 e variânça 1 é dada por

$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Seja

$$I(x) = \int_0^x N(t)dt.$$

Seguem alguns valores tabelados de $I(x) = \int_0^x N(t)dt$ para diferentes $x > 0$:

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5
$I(x) = \int_0^x N(t)dt$	0	0.1915	0.3413	0.4332	0.4772	0.4938

(a) Utilize interpolação polinomial *quadrática* usando a forma de Newton e os nós de interpolação mais apropriados para estimar $I(0.6)$. Lembre-se que [1 pt]

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \ldots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}).$$

(b) Estime um limitante superior para o erro da sua estimativa do item anterior usando o fato que $|E_n(x)|$ é geralmente dado por

$$|E_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right|,$$

em que

$$M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Note que você precisa aplicar esta fórmula no caso especial descrito no item (a). Pode utilizar o fato que $I^{(3)}$, quer dizer a 3a derivada de I, é crescente em $[0, \sqrt{3}]$. [0.75 pt]

(c) Utilize interpolação polinomial *quadrática inversa* usando a forma de Newton e os nós de interpolação mais apropriados para estimar o número η tal que $I(\eta) = 0.4$. [1.25 pt]

(a)

Ordem

x	0	1	2
0	0	0.3830	-0.0834
0.5	0.1915	0.2996	
1	0.3413		

1/2

$\therefore p_2(x) = 0 + 0.383 \cdot x \cancel{(x-0.5)} - 0.0834\, x(x-0.5)$

$\Rightarrow p_2(6.6) = 0.383 \cdot 0.6 - 0.0834 \cdot 0.6 \cdot 0.1 = 0.2248$

Portanto, $I(0.6) \simeq p_2(0.6) = 0.2248$

1/2

3. (b) $n = 2$

$$M_3 = \max_{x\in[x_0,x_2]} |f^{(3)}(x)| = \max_{x\in[0,1]} |f^{(3)}(x)|$$

aqui $f = I$

$$I^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad I^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right]$$

$$I^{(3)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\left[x^2-1\right]$$

Note que $I^{(3)}(x) \le 0$ para $x\in[0,1]\subset[0,\sqrt{3}]$

Sabemos que $I^{(3)}$ é crescente em $[0,\sqrt{3}]\supset[0,1]$

Portanto, $|I^{(3)}|$ é decrescente em $[0,1]$

$$\Rightarrow \max_{x\in[0,1]}|I^{(3)}(x)| = |I^{(3)}(0)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\therefore |E_2(0.6)| \le \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}(0.6)\cdot 0.1\cdot 0.4 = 0.0016$$

(c)

		Ordem	
$y=I(x)$	0	1	2
0.3413	1		
		5.4407	
0.4332	1.5		43.5843
		11.3636	
0.4772	2		

Assumimos que $I^{-1}(y)$ existe em $[0.3413, 0.477$

porque $I(1) < I(1.5) < I(2)$

$\frac{1}{2}$

$q_2(y) = 1 + 5.4407\cdot(y-0.3413)+43.5843(y-0.3413)(y-$

$\Rightarrow q_2(0.4) = 1+5.4407(0.4-0.3413)+43.5843(0.4-0.3413)\cdot(-0.$

$= 1.2344$ $\frac{1}{2}$

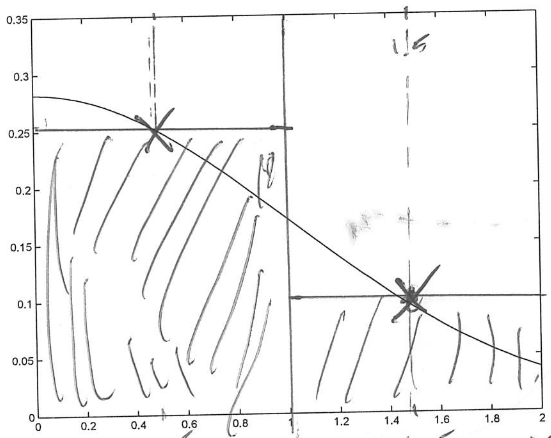
$\eta = I^{-1}(0.4) \approx q_2(0.4)$

4. (a) Utilize a Regra dos Retângulos Repetida com 2 subintervalos para estimar $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$. Lembre-se que a Regra dos Retângulos Repetida com n subintervalos é dada pela a fórmula [0.25 pt]

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{k=1}^{n} f(\frac{x_k+x_{k-1}}{2}) = h[f(\frac{x_1+x_0}{2})+\ldots+f(\frac{x_n+x_{n-1}}{2})].$$

(b) Utilize a figura no lado esquerdo para fazer uma interpretação gráfica da região cuja área corresponde ao seu resultado do item (a). Marque esta região claramente e inclue os nós de interpolação. [0.25 pt]

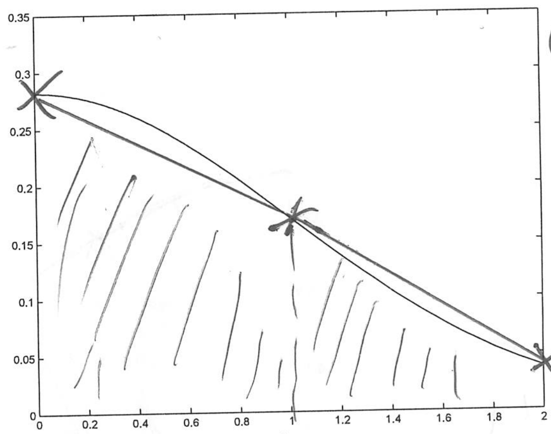
(b)



x_0 0.5 x_1 1.5 x_2

(a) Regra dos Retângulos Repetida

(d)



x_0 x_1 x_2

(b) Regra dos Trapézios Repetida

(c) Utilize a Regra dos Trapézios Repetida com 2 subintervalos para estimar $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$. Lembre-se que a Regra dos Trapézios Repetida com n subintervalos é dada pela a fórmula [0.25 pt]

$$\int_a^b f(x)dx \approx= \frac{h}{2}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_{n-1})+f(x_n)].$$

(d) Utilize a figura no lado direito acima para interpretar a região cuja área corresponde ao seu resultado do item (c) gráficamente. Marque esta região claramente e inclue os nós de interpolação. [0.25 pt]

Vire a página!

(a) $x_0=0, x_1=1, x_2=2, h = x_k - x_{k-1} = 1$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$\int_0^2 f(x)dx \approx f(\frac{x_1+x_0}{2}) + f(\frac{x_2+x_1}{2}) = f(0.5) + f(1.5$

$= 0.3521 + 0.1295 = 0.4816$

(c) $x_0=0, x_1=1, x_2=2, h=1$

$\int_0^2 f(x)dx \approx \frac{1}{2}[f(0)+2f(1)+f(2)] =$

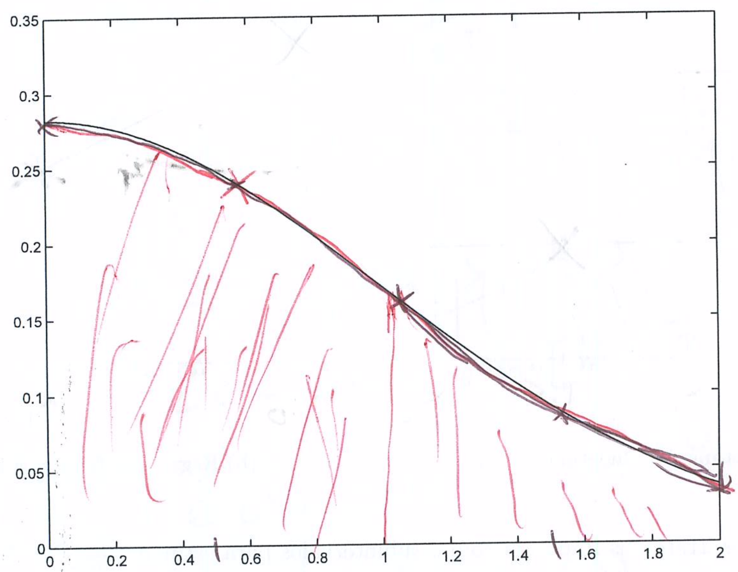
$= \frac{1}{2}[0.3989 + 2\cdot 0.242 + 0.0540] = 0.4684$

(e) Utilize a Regra dos Simpson Repetida com 2 subintervalos para estimar $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$. Lembre-se que a Regra de Simpson Repetida com n subintervalos é dada pela a fórmula

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Além disso, utilize a figura seguinte para interpretar a região cuja área corresponde ao seu resultado do item (e) gráficamente. Marque esta região claramente e inclue os nós de interpolação. [0.75 pt]

$\frac{1}{4}$



parabolas proximos à função

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4

(f) Utilize o seu resultado do item (e) para estimar $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-2}^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$. [0.25 pt]

$h = \frac{1}{2}$

(e) $\int_0^2 f(x)dx \approx \frac{1}{6}[f(0) + 4f(0.5) + 2f(1) + 4f(1.5) + f($

$= \frac{1}{6}[0.3989 + 4\cdot 0.3521 + 2\cdot 0.242 + 4\cdot 0.1295 + 0.0540$

$= 0.4772$

$\frac{1}{2}$

(f) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-2}^{2} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-2}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}}dx + \int_0^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right.$

$\frac{1}{4}$ $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2\int_0^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 2\int_0^2 f(x)dx \overset{(e)}{=} 2\cdot 0.47$

0.8544