1 Gabarito

MS211 - Turma E - Prova 1 - 27/06/2023

Nome: RA:

Utilize **4 digitos decimais** em todas as questões! Não precisa escrever zeros não significativos. (Por exemplo, pode escrever 0.5 ao invés de 0.5000.) Somente faça o que está pedido. **Justifique as suas respostas!** Boa prova!

1. A fatoração LU é comunemente utilizada no método de Newton Modificado para resolver sistemas de equações não-lineares que podem ser expressados na forma $F(\mathbf{x}) = (0, 0, \ldots, 0)^T$. Considere o chute inicial $\mathbf{x}^{0)} = (0.2, 0, -0.5)^T$ e a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0.2x_1x_2 + 20x_3 + \frac{10\pi-3}{3} \\ 3x_1 - 0.2x_3(x_2+1) - \frac{1}{2} \\ x_1^2 - 81(x_2+0.1)^2 + \sin(x_3) + 1.06 \end{pmatrix}.$$

A matriz jacobiana de F no ponto $\mathbf{x}^{0)}$ é dada por

$$J(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0.2x_2 & 0.2x_1 & 20 \\ 3 & -0.2x_3 & -0.2(x_2+1) \\ 2x_1 & 162(x_2+0.1) & \cos(x_3) \end{pmatrix}.$$

e a fatoração com pivoteamento dela é

(a) Avalie $J(\mathbf{x}^{(0)})$ em $\mathbf{x}^{0)} = (0.2, 0, -0.5)^T$. [0.25 pts]

(b) É possivel de determinar a fatoração LU SEM pivoteamento de $J(\mathbf{x}^{(0)})$? Justifique a sua resposta? [0.25 pts]

(c) Determine a fatoração LU COM pivoteamento de $J(\mathbf{x}^{(0)})$ usando o vetor p e as matrizes $R^{(i)}$ e $R^{(i)\prime}$ como ensinado na aula. Quais são as matrizes L, U e P resultantes? [1.5 pts]

(d) Qual é a relação entre $J(\mathbf{x}^{(0)})$ e as matrizes L, U e P obtidas? [0.25 pts]

(a) $J(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0.04 & 20 \\ 3 & 0.1 & -0.2 \\ 0.4 & 16.2 & 0.8776 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{4}$

(b) Não porque na tentativa do cálculo da fatoração LU sem pivoteamento se encontra o pivô 0 no canto esquerdo na 1a linha. Portanto, não é possível determinar a fatoração LU sem pivoteamento porque a leva a o cálculo do 1o multiplicador a uma divisão por 0. $\frac{1}{4}$

(d) $LU = P \cdot J(x^{(0)})$ $\frac{1}{4}$

2. Considere

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obviamente $Ax = b$ se e somente se $x = (0,0)^T$.

(a) Verifique se o critério das linhas está satisfeito. Quais são as consequências para a convergência de cada um dos métodos seguintes?

i. O método de (Gauss-)Jacobi;

ii. O método de Gauss-Seidel.

[0.5 pts]

(b) Seja $x^{(0)} = (1,2)^T$. Aplique 2 iterações do método de (Gauss-)Jacobi e gere $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ usando a fórmula $x^{(k+1} = Cx^{(k)} + g$ para algum $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ e algum $g \in \mathbb{R}^2$. Qual é a sua conclusão referente à convergência de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$? [0.5 pts]

(c) Verifique se o critério de Sassenfeld está satisfeito. O que você pode afirmar referente as consequências do seu resultado para os métodos seguintes?

i. O método de (Gauss-)Jacobi;

ii. O método de Gauss-Seidel.

[0.5 pt]

(d) Utilize a matriz C e o vetor g do item (b) para gerar $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ aplicando o método de Gauss-Seidel ao sistema $Ax = b$ com chute inicial $x^{(0)} = (1,2)^T$. Exibe os vetores intermediários. Qual é a sua conclusão referente a convergência do método de Gauss-Seidel neste caso? [1 pt]

(e) Faça uma interpretação gráfica do item anterior mostrando as retas, os pontos e as transições do ponto anterior para o próximo. As referidas transições devem ser visualizadas usando flechas. [0.5 pt]

(a) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |C| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = 1 \not< 1$ $\frac{1}{4}$

∴ o critério das linhas não é satisfeito

Conclusão: Não sabemos para qualquer chute inicia

se (i) o método de Jacobi converge; $\frac{1}{4}$

(ii) o método de Gauss-Seidel converge.

(b) $x^{(k+1)} = C \cdot x^{(k)} + g = Cx^{(k)} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C \cdot x^{(k)}$

$\Rightarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{2}$

$x^{(2)} = C \cdot x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, i.e., a única solução de Ax

$\therefore Ax^{(2)} = b \Leftrightarrow x^{(2)} = C \cdot x^{(2)} + g \Leftrightarrow x^{(k)} = x^{(2)} \; \forall k \geq 2$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

E

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 0.1 & -0.2 \\ 0 & 0.04 & 20 \\ 0.4 & 16.2 & 0.8776 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$R^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 0.1 & -0.2 \\ 0 & 0.04 & 20 \\ 0.1333 & 16.1867 & 0.9042 \end{pmatrix}, \quad -u-$$

$$R^{(1)'} = \begin{pmatrix} 3 & 0.1 & -0.2 \\ 0.1333 & 16.1867 & 0.9042 \\ 0 & 0.04 & 20 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 0.1 & -0.2 \\ 0.1333 & 16.1867 & 0.9042 \\ 0 & 0.0025 & 19.9978 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1333 & 1 & 0 \\ 0 & 0.0025 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 3 & 0.1 & -0.2 \\ 0 & 16.1867 & 0.9042 \\ 0 & 0 & 19.9978 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}$$

$$|C| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma_1 = \sigma_1 = 1 \not< 1$$ 1/2

∴ O critério de Sassenfeld não é satisfeito

Conclusão: Não sabemos para qualquer chute inicial se 1/4

(i) o método de Jacobi converge

(ii) o método de Gauss-Seidel converge

(d) $x_1^{(1)} = (0 \;\; 1) \cdot x^{(0)} = (0 \;\; 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \leadsto \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$x_2^{(1)} = (0 \;\; 0) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_1^{(2)} = (0 \;\; 1) \cdot x^{(1)} = 0 \leadsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 1

$x_2^{(2)} = (0 \;\; 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

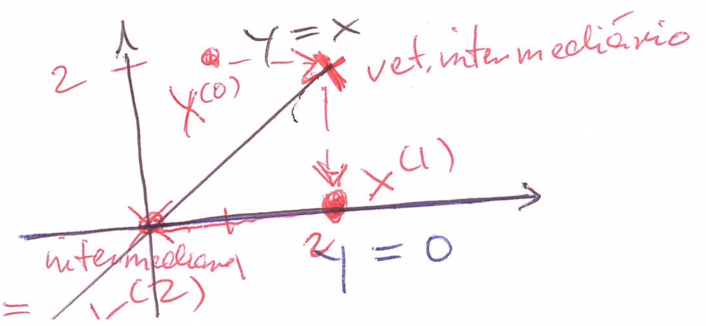
Lembre-se que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ é a solução única de $Ax = b$

$\therefore A x^{(2)} = b \Leftrightarrow x^{(2)} = C_{GS} \cdot x^{(2)} + g_{GS}$

Sendo C_{GS} e g_{GS} a matriz e o vetor usados aplicando o método de Gauss-Seidel de modo paralelo

$$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(e)

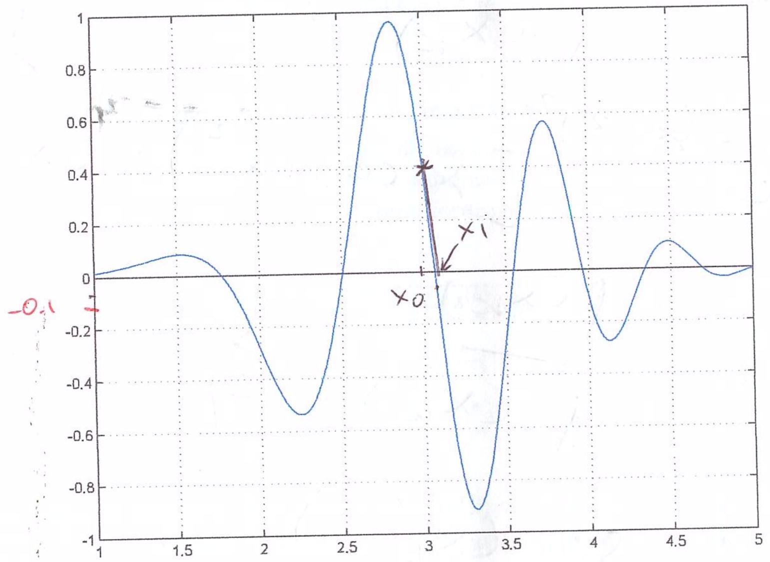


1/2

3. A técnica chamada "zero-crossing" é um dos métodos que permite avaliar o tempo de atraso da propagação de ondas. Tendo em vista esta observação, considere um sinal de onda dado pela equação seguinte:

$$e^{-(x-3)^2}\sin(x^2) = 0. \tag{1}$$

A figura em baixo mostra o gráfico de $f(x) = e^{-(x-3)^2}\sin(x^2)$ no intervalo $[1, 5]$.



1/4

(a) Faça uma interpretação gráfica de uma iteração do método de Newton-Raphson com chute inicial $x_0 = 4$ e obtenha x_1 gráficamente. [0.25 pts]

(b) Suponha que o método de Newton-Raphson é aplicado usando o critério de parada $|f(x_k)| < 0.1$ ou $|x_k - xk - 1| < 0.1$. Quantas iterações são necessários até este critério de parada é atingido segundo o seu gráfico? Justifique a sua resposta. [0.25 pts]

(c) Considerando o chute inicial $x_0 = 3$ e $\varepsilon = 10^{-1}$, execute o método de Newton-Raphson até $|f(x_k)| < \varepsilon$ ou $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ e preenche a tabela em baixo. Exibe os detalhes necessários, em particular $f'(x)$ e a fórmula utilizada para gerar x_{k+1} a partir de x_k. Sugere-se simplificar as expressões obtidas. [1.25 pts] 1,5

k	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	3	0.4121 1/4	-
1	3.0754 1/4	-0.0330 1/4	0.0754 1/4

(d) Sob certas condições, sabe-se que o método de Newton-Raphson produz uma sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que converge com ordem pelo menos quadrática para uma raíz ξ de f. Qual é o significado da afirmação que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge com ordem de convergência quadrática para ξ? [~~0.5~~ pts] 0.25

(b) Segundo a interpretação gráfica, $f(x_1) < 0.1$ e portanto somente 1 iteração é necessário para atingir o critério de parada $\frac{1}{4}$

(c) $f(x) = e^{-(x-3)^2} \operatorname{sen}(x^2)$

$f'(x) = -2(x-3)\, e^{-(x-3)^2} \operatorname{sen}(x^2) + e^{-(x-3)^2}\, 2x \cos(x^2)$

$\left(x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right)$ $\frac{1}{4}$

$f'(x) = 2\, e^{-(x-3)^2} \left[x \cos(x^2) - (x-3) \operatorname{sen}(x^2) \right]$

$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ $\frac{1}{4}$

$= x_k - \frac{\operatorname{sen}(x_k^2)}{2\left[x_k \cos(x_k^2) - (x_k - 3) \operatorname{sen}(x_k^2) \right]}$

(d) Seja $e_k = x_k - \xi$

convergência quadrática significa

$|e_{k+1}| \approx C \cdot e_k^2$ para $k >> 0$ $\frac{1}{4}$

Para ser mais preciso,

$\lim_{k \to \infty} \frac{|e_{k+1}|}{e_k^2} = C$ para algum $C > 0$

E

4. Considere o problema de encontrar os valores de x e y que minimizem a função

$$f(x,y) = (x-y)^2 + [x^2 + 2 - 2y]^2.$$

Seja $\mathbf{z} = (x,y)^T$. Sugere-se resolver o sistema não-linear seguinte:

$$\begin{cases} g_1(\mathbf{z}) = g_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0 \\ g_2(\mathbf{z}) = g_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Seja $G(\mathbf{z}) = (g_1(\mathbf{z}), g_2(\mathbf{z}))^T$.

(a) Determine as derivadas parciais na equação em cima e escreve o sistema não-linear por extenso. [0.25 pts]

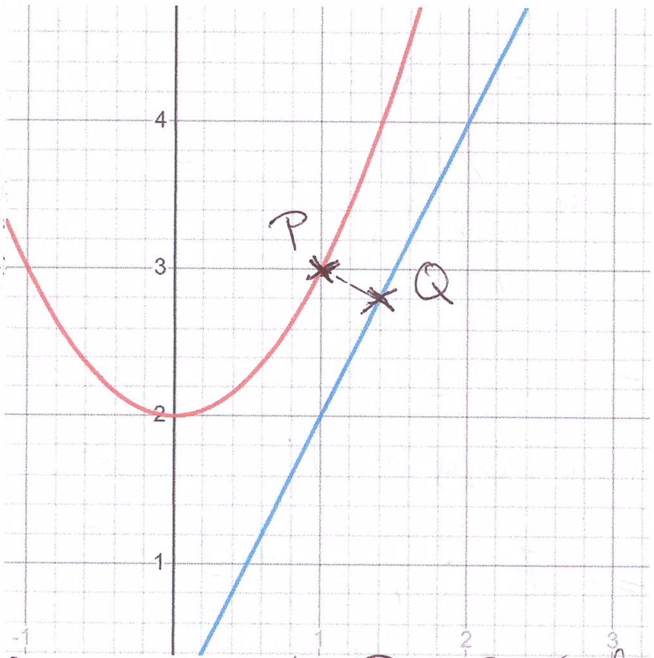
(b) Utilizando o item anterior, execute 1 passo do método de Newton com a aproximação inicial $\mathbf{z}^{(0)} = (x_0, y_0)^T = (1,1)^T$ e preenche os ... na tabela seguinte. Explique como você fez as contas, em particular qual é a matriz Jacobiana $J(\mathbf{z}) = J(x,y)$ e como foram obtidos $s^{(0)}$ e $\mathbf{z}^{(1)}$. Verifique que $||G(\mathbf{z}^{(1)})||_\infty = 0$.
1,75 [~~1.5~~ pts]

k	$\mathbf{z}^{(k)}$	$G(\mathbf{z}^{(k)})$	$\lVert G(\mathbf{z}^{(k)})\rVert_\infty$	$\lVert s^{(k-1)}\rVert_\infty$	$s^{(k)}$
0	$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$	4	–	$\begin{pmatrix}0\\0.4\end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix}1\\1,4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	0	0,4	

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

(c) A figura em baixo mostra os gráficos das funções $p(x) = x^2 + 2$ e $r(x) = 2x$. Marque as localizações dos pontos $(x_1^{(1)}, (x_1^{(1)})^2)$ e $(y_1^{(1)}, 2y_1^{(1)})$, sendo $x_1^{(1)}$ e $y_1^{(1)}$ as entradas de $\mathbf{z}_1^{(1)}$ obtido no item anterior. Qual é a sua observação referentes estes dois pontos? Justifique a sua resposta. [0.5 pt]



$\frac{1}{2}$

A distância euclidiana entre P e Q é distância euclidiana mínima entre um ponto na parabola $y = x^2 + 2$ e a reta $y = 2x$ devido ~~ao~~ fato que $(x^{(1)}, y^{(1)})$ minimiza a função $f(x,y)$

(a) $g_1(x,y) = 2(x-y) + \cancel{4\ell x}\, 4x(x^2+2-2y)$

$g_2(x,y) = -2(x-y) - 4(x^2+2-2y)$

$g_1(x,y) = 4x^3 + (10-8y)\cancel{x} - 2y = 4x^3 + (10-8y)x - 2y$

$g_2(x,y) = 10y - 4x^2 - 2x - 8$

1/2

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 8y + 10 & -8x-2 \\ -8x-2 & 10 \end{pmatrix}$$

1/4

No método de Newton, são executados os passos seguintes

1. Resolve $J(x^{(k)}) \cdot s^{(k)} = -F(x^{(k)})$, i.e., aqui

$$J(z^{(k)}) \cdot s^{(k)} = -G(z^{(k)})$$

1/2

2. $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$, i.e., neste exemplo

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} + s^{(k)}$$

$z^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, vamos resolver $J(\cancel{x} z^{(0)}) = -G(z^{(0)})$

Note que $G(1,1) = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

1/4

$$\left(\begin{array}{cc|c} 14 & -10 & -4 \\ -10 & 10 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 7 & -5 & -2 \\ -5 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 7 & -5 & -2 \\ 0 & 1,4286 & 0,5714 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 7 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0.4 \end{array}\right)$$

$s_2^{(0)} = 0.4 \Rightarrow 7 \cdot s_1^{(0)} = -2 + 5 \cdot 0.4 = 0$

$\Rightarrow s_1^{(0)} = 0$

$\Rightarrow s^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.4 \end{pmatrix} \Rightarrow z^{(1)} = z^{(0)} + s^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,4 \end{pmatrix}$