GABARITO

MS211 - Turma D - Prova 1 - 17/05/2022

Nome: RA:

Utilize **5 dígitos decimais** *(quer dizer depois da vírgula) e arredondamento em todas as questões* **exceto na Questão 1 que deve ser feito usando frações** *e sem calculadora! Não precisa escrever os 0s depois do último dígito decimal não nulo! Boa prova!*

1. Considere a seguinte matrix A e o seguinte vetor b:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} -34 \\ 10 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Se for possivel, determine a fatoração LU sem pivoteamento da matriz A. Caso contrário, justifique porque A não admite uma fatoração LU sem pivoteamento. [0.25 pts]

(b) Determine as matrizes L, U e P da fatoração LU com pivoteamento parcial de A. [1.25 pts]

(c) Utilize L, U e P para determinar a solução de $Ax = b$ através da resolução de dois sistemas triangulares. [0.75 pt]

(d) De modo geral, em que situação é interessante determinar uma fatoração LU de uma matriz A? Justifique a sua resposta. [0.25 pts]

1.(a) A aplicação da fatoração LU sem pivoteamento não é possível porque no início obtemos

$$R = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & -5 \\ \hline 1 & 0 & \dots \\ -3 & 7 & \dots \end{array}\right)$$ o que levaria a um pivô = 0 e daí uma divisão por 0.

1/4

(b)

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix},\ p = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow R = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 0 \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{14}{3} & 3 \\ -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} & -5 \end{array}\right), \quad p = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{4}$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc} -3 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{14}{3} & 3 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{13}{2} \end{array}\right)$$

$\frac{1}{4}$

$$\therefore L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{14}{3} & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{2} \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$

(c) $Ax = b \Leftrightarrow PAx = Pb \Leftrightarrow L\underbrace{Ux}_{y} = Pb$

1. $Ly = Pb$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 10 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & -34 \end{array}\right)$$

$y_1 = \frac{3}{2}$

$-1 + y_2 = 10 \Rightarrow y_2 = 11$

$-\frac{1}{2} + \frac{11}{2} = -34 \Rightarrow y_3 = -39$

$\frac{1}{2}$

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2} \\ 6 \end{pmatrix}$$

2. $Ux = y$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{14}{3} & 3 & 11 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{2} & -39 \end{array}\right)$$

$\frac{1}{4}$

$x_3 = 6$

$\frac{14}{3}x_2 + 18 = 11 \Rightarrow \frac{14}{3}x_2 = -7$

$\Rightarrow x_2 = -\frac{3}{2}$

$3x_1 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow 3x_1 = -3$

$\Rightarrow x_1 = -1$

(d) Determinar a fatoração LU de $A \in \mathbb{R}^{4\times4}$ é interessante quando se precisa resolver vários sistemas lineares com a matriz de coeficientes A, i.e. $Ax = b^{(i)}$, $i = 1, \ldots, k$ para $k \gg 0$

$\frac{1}{4}$

f representa a composição de φ, soma, produto e diferença de funções infinitas vezes diferenciável e por isto é infinitas vezes diferenciável também

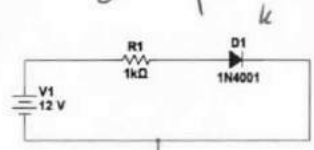

Fig. 7. Circuito Não Linear.

2(a) $f'(v) = 4 \cdot 10^{-5} \cdot e^{40v} + 1 > 0$ $\forall v \in \mathbb{R}$ porque $e^{40v} > 0$ $\forall v \in \mathbb{R}$

Portanto, f é estritamente crescente $\Rightarrow$ f possui uma única raiz

2. Considere um circuito elétrico a diodo tal que

- R, a tensão da resistência, é 1000Ω.
- V_B, a voltagem da bateria, é 12 V.

Seja $i = I_S(e^{cv} - 1)$, sendo

- I_S a intensidade de corrente de saturação reversa, cujo valor típico é 10^{-9} ampere,
- a constante $c = 40$.

A tensão no circuito é o zero da seguinte função f:

$$f(v) = iR + v - V_B.$$

(a) Explique brevemente porque f possui uma única raiz ξ. [0.25 pts]

(b) Explique brevemente usando os seus conhecimentos de cálculo porque f' e f'' existem e são contínuas e porque $f'(\xi) \neq 0$. [0.25 pts]

(c) Qual é a definição matemática da ordem de convergência de uma sequência convergente (x_k)? Em outras palavras, utilize fórmulas para explicar o significado da afirmação que a ordem de convergência de (x_k) é p. Qual é a ordem de convergência de uma sequência (x_k) gerada pelo método de Newton-Raphson sob condições normais, quer dizer, se as condições do teorema apresentado na aula são satisfeitas? [0.5 pts]

(d) Aplique o método de Newton-Raphson com $v_0 = 0.4$ (V) e $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-3}$ e coloque os resultados na tabela seguinte. Mostre f' e a fórmula que você usou para gerar v_{k+1} a partir de v_k. O resto segue das suas entradas na tabela. Pare quando $|f(v_k)| < \varepsilon$ ou $|v_k - v_{k-1}| < \varepsilon$. Explique porque parou e qual é a aproximação obtida da tensão no circuito. [1.5 pts]

2(d)

k	v_k	$f(v_k)$	$\lvert v_k - v_{k-1}\rvert$
0	0.4	-2.7139	$\frac{1}{4}$ -
1	0.4076	0.45732	0.00761
2	0.40667	0.00853	0.00095 $< \varepsilon = 3 \cdot 10^{-3}$.

$$v_{k+1} = v_k - \frac{f(v_k)}{f'(v_k)}$$ $\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$

Portanto, a tensão no circuito é $\approx v_2 = 0.40667$ V $\frac{1}{4}$

2(c) Seja $\xi = \lim_{k \to \infty} x_k$ e $e_k = x_k - \xi$

a Ordem de convergência de (x_k) é p

$$\Leftrightarrow \lim_{k \to \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C$$

para algum $C > 0$

A ordem de convergência do método de Newton-Raphson é 2 (sob condições normais)

3. (a) Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 2$. Determine a matriz Jacobiana $J(\mathbf{x})$ da seguinte função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ [0.5 pts]:

$$F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_i(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_{n-1}(\mathbf{x}) \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1^2 + 3x_1 - 2x_2 - 1 \\ x_1 + 2x_2^2 + 3x_2 - 2x_3 - 1 \\ \vdots \\ x_{i-1} + 2x_i^2 + 3x_i - 2x_{i+1} - 1 \\ \vdots \\ x_{n-2} + 2x_{n-1}^2 + 3x_{n-1} - 2x_n - 1 \\ x_{n-1} + 2x_n^2 + 3x_n - 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Verifique se as afirmações seguintes são verdadeiras:

i. Se $x_1, \ldots, x_n > 0$, então $J(\mathbf{x})$ satizfaz o critério das linhas. [0.75 pts]

ii. Se $x_1, \ldots, x_n \geq 0$, então $J(\mathbf{x})$ satizfaz o critério de Sassenfeld. [0.75 pts]

(c) Seja $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}_+^n$, quer dizer, $x_i^{(0)} > 0 \ \forall i = 1, \ldots, b$. Quais as consequências das suas observações do item (b) para a convergência do

i. método de Jacobi,

ii. método de Gauss-Seidel,

na sua aplicação para resolver um sistema linear da forma $J(\mathbf{x}^{(0)})\mathbf{t} = -F(\mathbf{x}^{(0)})$ usando qualquer chute incial $\mathbf{t}^{(0)}$? [0.25 pts]

(d) Seja $\mathbf{x}^{(0)} = (0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$. Quais as consequências das suas observações do item (b) para a convergência do

i. método de Jacobi,

ii. método de Gauss-Seidel,

na sua aplicação para resolver um sistema linear da forma $J(\mathbf{x}^{(0)})\mathbf{t} = -F(\mathbf{x}^{(0)})$ usando qualquer chute incial $\mathbf{t}^{(0)}$? [0.25 pts]

3.(a) $$J(x) = \begin{vmatrix} 4x_1+3 & -2 & 0 & \cdots & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 4x_2+3 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & 1 & 4x_i+3 & -2 & 0 & \cdot \\ & 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & 4x_{n-1}+3 & -2 \\ & 0 & & & 0 & 1 & 4x_n+3 \end{vmatrix}$$

3(b) (i) $x_1, \dots, x_n > 0$

(i)

$$|C| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{|4x_1+3|} & 0 & \cdots & & \\ \frac{1}{|4x_2+3|} & 0 & \frac{2}{|4x_2+3|} & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{|4x_{n-1}+3|} & 0 & \frac{2}{|4x_{n-1}+3|} \\ & & & & \frac{1}{|4x_n+3|} & 0 \end{vmatrix}$$

$\alpha_1 = \frac{2}{4x_1+3} < \frac{2}{3} < 1$

$\alpha_2 = \frac{3}{4x_2+3} < \frac{3}{3} = 1$

$\alpha_i = \frac{3}{4x_i+3} < \frac{3}{3} = 1$ para $i = 2, \dots, n-1$

$\alpha_n = \frac{1}{4x_n+3} < \frac{1}{3} < 1$

$\therefore J(x)$ satisfaz o critério das linhas

(ii) $x_1, \dots, x_n \geq 0$

$$|C| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{4x_1+3} & 0 & \cdots & & 0 \\ \frac{1}{4x_2+3}\cdot\gamma_1 & 0 & \frac{2}{4x_2+3} & 0 & \cdots & 0 \\ & \frac{1}{4x_3+3}\gamma_2 & 0 & \frac{2}{4x_3+3} & 0 \cdots & 0 \\ & & & & & \\ & & & & \left(\frac{1}{4x_{n-1}+3}\right)\cdot\gamma_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

$\gamma_1 = \frac{2}{4x_1+3} \leq \frac{2}{3} < 1$

$\gamma_2 = \frac{1}{4x_2+3}\cdot\gamma_1 + \frac{2}{4x_2+3} < \frac{3}{4x_2+3} \leq \frac{3}{3} = 1$

$\gamma_i = \frac{1}{4x_i+3}\cdot\gamma_{i-1} + \frac{2}{4x_i+3} < \frac{3}{4x_i+3} \leq \frac{3}{3} = 1$

para $i = 2, \dots, n-1$

$\gamma_n = \frac{1}{4x_{n-1}+3}\cdot\gamma_{n-1} < \frac{1}{4x_{n-1}+3} < 1$

$\therefore J(x)$ satisfaz o critério de Sassenfeld

3.(c) Se $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n_+$, então

o critério das linhas é satisfeito para $J(x^{(0)})$

Portanto, tanto o método de Jacobi quanto

o método de Gauss-Seidel convergem

quando aplicado a $J(x^{(0)}).t = -F(x^{(0)})$

para qualquer chute inicial $t^{(0)}$

3(a) i Para $x^{(0)} = (0, \dots 0)^T$, o critério das

linhas não é satisfeito. Baseado neste critério,

Não sabemos se o método de Jacobi

vai produzir uma sequência convergente

~~na a~~ quando aplicado a $J(x^{(0)}).t = -F(x^{(0)})$

e um chute inicial $t^{(0)}$

(ii) com $x^{(0)} = (0 \dots 0)^T$, $J(x^{(0)})$ satisfaz

o critério de Sassenfeld.

Portanto o método de Gauss-Seidel

produz uma sequencia $t^{(k)}$

que converge para a solução de $J(x^{(0)}).t = -F(x^{(0)})$

$$F(x) = \begin{pmatrix} 2x_1^2 + 3x_1 - 2x_2 - 1 \\ x_1 + 2x_2^2 + 3x_2 - 2x_3 - 1 \\ x_2 + 2x_3^2 + 3x_3 - 1 \end{pmatrix}$$

4. Considere o seguinte sistema não-linear:

$$\begin{cases} 2x_1^2 + 3x_1 - 2x_2 &= 1 \\ x_1 + 2x_2^2 + 3x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3^2 + 3x_3 &= 1 \end{cases}$$

Seja $\mathbf{x}^{(0)} = (0.4, 0.3, 0.2) \in \mathbb{R}^3$ tal que $\varepsilon = 10^{-3}$. Obtenha uma aproximação para a solução do sistema pelo método de *Newton*. Providencie detalhes. Pare se um dos 2 critérios de parada está satisfeito, quer dizer, assim que $||F(\mathbf{x}^{(k)}||_\infty < \varepsilon$ ou $||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}||_\infty < \varepsilon$, e preenche a tabela seguinte (Lembre-se que $||\mathbf{v}||_\infty = max_{1 \le i \le n}|v_i|$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$). Exibe todos os passos que devem ser feitos usando 5 dígitos decimais. Escreve os sistemas lineares que precisam ser resolvidos e as soluções encontradas em cada iteração. Qual é a aproximação obtida de uma solução do sistema não-linear? [2.5 pts]

k	$x^{(k)}$	$F(x^k)$	$\lVert F(x^k)\rVert_\infty$	$\lVert s^{(k-1)}\rVert_\infty$	$s^{(k)}$
0	$\begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.08 \\ 0.08 \\ -0.02 \end{pmatrix}$	0.08	-	$\begin{pmatrix} 0.01007 \\ -0.01683 \\ 0.00969 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} 0.41007 \\ 0.28317 \\ 0.20969 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.00020 \\ 0.00057 \\ 0.00019 \end{pmatrix}$	0.00057	$< \varepsilon = 10^{-3}$ PARE!	

$x^{(2)} = (0.41007, 0.28317, 0.20969)^t$ é a aproximação

No método de Newton, usa-se um chute inicial $x^{(0)}$ de uma solução do sistema não linear

Dado $x^{(k)}$, geramos $x^{(k+1)}$ da maneira seguite:

1. Resolve $J(x^{(k)}) \cdot s^{(k)} = -F(x^{(k)})$

2. Faca $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$

Aqui $J(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 + 3 & -2 & 0 \\ 1 & 4x_2 + 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4x_3 + 3 \end{pmatrix}$

Resolve $J(X^{(0)}) \cdot S^{(0)} = -F(X^{(0)})$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4.6 & -2 & 0 & 0.08 \\ 1 & 4.2 & -2 & -0.08 \\ 0 & 1 & 3.8 & 0.02 \end{array}\right) \quad \frac{1}{2}$$

$$\cdots \Rightarrow S^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.01007 \\ -0.01683 \\ 0.00969 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{4}$$