MS211 - Turma D - Prova 2 - 07/07/2022

Nome: RA:

Utilize **4 dígitos decimais** *(quer dizer depois da vírgula) e arredondamento em todas as questões escrever os 0s depois do último dígito decimal não nulo! Boa prova!*

1. Considere o PVI

$$\begin{cases} y' + y &= x^2 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

(a) Aplique o método de Euler Aperfeiçoado em forma tabelar com $h = 0.5$ e preenche os espaços marcados com … de uma tabela da forma seguinte seguinte colocando as fórmulas específicas para este problema particular. Qual é a aproximação obtida de $y(1)$? [1.75 pts]

x_k	y_k	$y'_k = \ldots$ $x_k^2 - y_k$	$\bar{y}_{k+1} = y_k + y'_k h$	$\bar{y}'_{k+1} = \ldots$ $x_{k+1}^2 - \bar{y}_{k+1}$	$\Delta y_k \approx (y'_k + \bar{y}'_{k+1})\frac{h}{2}$
0	1	…	…	…	…
0.5	…	…	…	…	…
1	…				

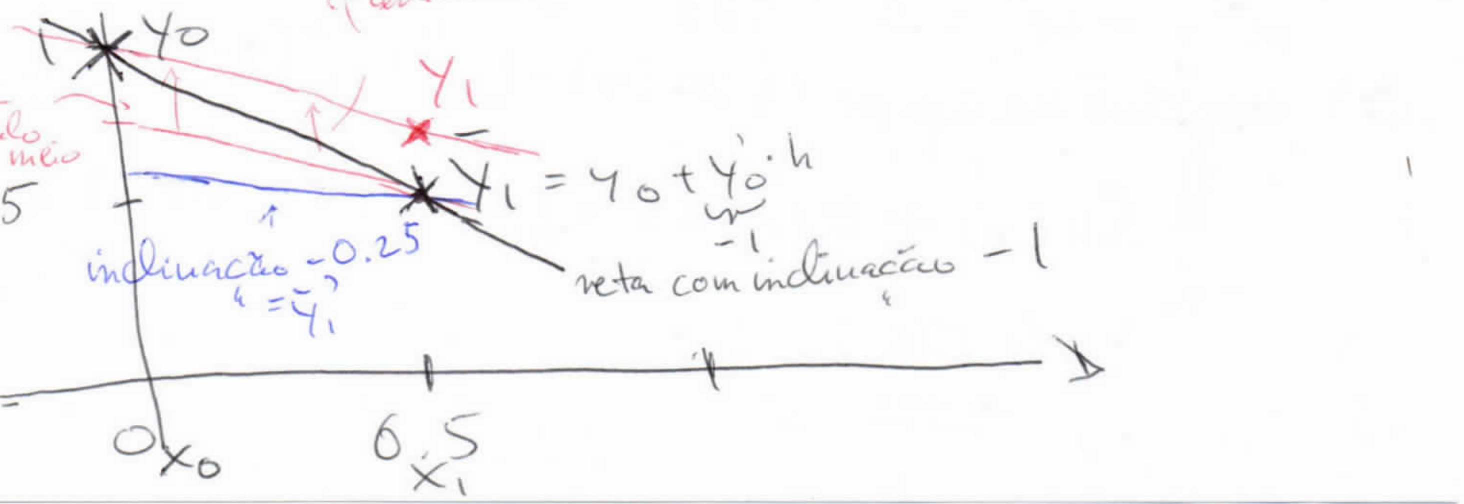
(b) Faça uma interpretação gráfica do primeiro passo, utilizado para obter y_1. Este gráfico deve incluir as tangentes dos ramos da solução envolvidos mas não precisa incluir nenhum ramo da solução da equação diferencial. Em outras palavras, o gráfico deve mostrar apenas algumas retas e pontos e explicar o que se faz com estas retas para obter y_1. [0.75 pts]

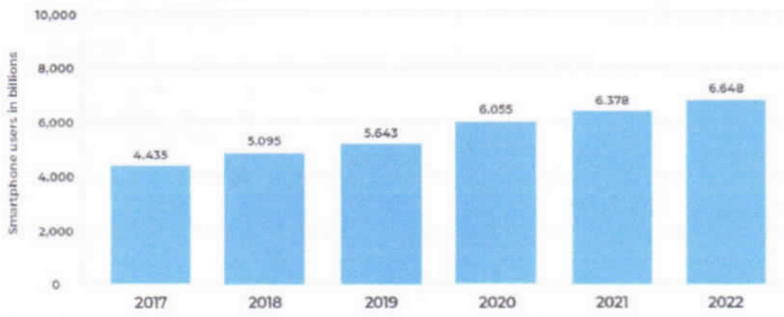
a)

x_k	y_k	$y'_k = x_k^2 - y_k$	$\bar{y}_{k+1} = y_k + y'_k \cdot h$	$\bar{y}'_{k+1} = x_{k+1}^2 - \bar{y}_{k+1}$	$\Delta y_k = (y'_k + \bar{y}'_{k+1})\frac{h}{2}$
0	1	-1	0.5	-0.25	-0.3125
0.5	0.6875	-0.4375	0.4688	0.53125	0.0234
1	0.7109				

$y(1) \approx y_2 = 0.7109$

b)





2. Considere os números de smartphones e as populações no mundo nos últimos 6 anos.

Ano	2017	2018	2019	2020	2021	2022
População em bilhões	7.55	7.63	7.71	7.79	7.87	7.94
População $0-4$ anos em milhões	674.7	676.4	677.4	677.9	684.6	686.1

Vamos assumir que a razão $r(t)$ de *usuários de smartphones entre pessoas com* ≥ 5 *anos* no mundo exibe um crescimento logístico e pode ser aproximado por

$$r(t) \approx \frac{r_M}{1+ce^{-k(t-t_0)}},$$

sendo $r_M = 1$ (correspondendo a 100%) a razão máximal de usuários de smartphones entre pessoas com ≥ 5 anos de smartphones e $t_0 = 2017$.

(a) Utilize o Método dos Quadrados Mínimos para estimar c e k. Exibe a matrizes A e B e os vetores r e b utilizados no processo. Para tanto, precisa-se "linearizar" o problema e encontrar dois valores que podem ser chamados α_1^* e α_2^*. Quais são os valores obtidos c^* e k^*? (Dica: Note que no primeiro lugar é necessário de calcular as razões de usuários de smartphones com ≥ 5 anos em $2017, \dots, 2022$.) [2.25 pts]

(b) Calcule o residuo do ajuste dado pela soma dos quadrados dos desvios referente ao problema "linearizado". [0.25 pts]

(c) Calcule o residuo do ajuste à função r para $t = 2017, \dots, 2022$ dado pela soma dos quadrados dos desvios. [0.25 pts]

(d) Utilize os valores c^* e k^* para estimar a percentagem de usuários de smartphones entre pessoas com ≥ 5 anos no ano 2025. [0.25 pts]

2 (a) $r \approx \dfrac{1}{1+ce^{-k(t-t_0)}} \Rightarrow \dfrac{1}{r} \approx 1 + ce^{-k(t-t_0)}$ $\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{1}{r} - 1 \approx ce^{-k(t-2017)}}$ $\frac{1}{4}$

As populações ≥ 5 anos em milhões são dados por $\frac{1}{4}$

Ano	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Pop	6875.3	6953.6	7032.6	7112.1	7185.4	7253.9

$\Rightarrow$ as razões de usuarios de smartphones entre pessoas ≥ 5

Ano	2017	2018	2019	2020	2021	2022
r	0.6451	0.7327	0.8024	0.8514	0.8876	0.9165

$\frac{1}{4}$

Seja $y = \frac{1}{r} - 1 \in \mathbb{R}^6 \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 0.5502 \\ 0.3648 \\ 0.2463 \\ 0.1746 \\ 0.1266 \\ 0.0911 \end{pmatrix}$ 1/4

$$y \approx c \cdot e^{-k(t-t_0)}$$

$$\Rightarrow \ln(y) \approx \underbrace{\ln(c)}_{\alpha_1} + \underbrace{(-k)}_{\alpha_2}(t - \underset{\substack{\uparrow \\ 2017}}{t_0})$$ 1/2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow B = A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 15 & 55 \end{pmatrix}$$ 1/4 1/4

$$\ln(y) = (-0.5974, -1.0084, -1.4014, -1.7454, -2.0668, -2.3954)^T$$ 1/4

$$b = A^T \cdot \ln(y) = \begin{pmatrix} -9.2147 \\ -29.2912 \end{pmatrix}$$ 1/4

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 15 & -9.2147 \\ 15 & 55 & -29.2912 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 15 & 9.2147 \\ 0 & 17.5 & -6.2545 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha_1^* = -0.6423$$ 1/2
$$\alpha_2^* = -0.3574$$

$$\Rightarrow c^* = e^{\alpha_1^*} = 0.5261$$
$$k^* = -\alpha_2^* = 0.3574$$ 1/2

(b) residuo do ajuste $= \| \ln(y) - [\alpha_1^* + \alpha_2^*(t - 2017)] \|_2^2$

$$= \| \ln(y) + 0.6423 + 0.3574\,(t - 2017) \|_2^2$$

$$= \underline{\underline{0.0062}}$$

(c) resíduo do ajuste a v

$$= \left\| v - \begin{pmatrix} \frac{1}{1+c^* e^{-k^* 0}} \\ \frac{1}{1+c^* e^{-k^*}} \\ \vdots \\ \frac{1}{1+c^* e^{-k^* 5}} \end{pmatrix} \right\|_2^2$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 0.6451 \\ 0.7327 \\ 0.8024 \\ 0.8514 \\ 0.8876 \\ 0.9169 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.6552 \\ 0.7310 \\ 0.7953 \\ 0.8474 \\ 0.8881 \\ 0.9190 \end{pmatrix} \right\|_2^2 \approx 0.0002$$

(d) A percentagem de usuários de smartphones entre pessoas com ≥ 5 anos é aproximadamente

$$\frac{1}{1+c^* e^{-k^*(2025-2017)}} \%$$

$$= \frac{1}{1+0.5261\, e^{-0.3574 \cdot 8}} \%$$

$$\approx 97{,}0724 \%$$

16:5502

2010	194 807 580
2011	196 621 490
2012	198 405 760
2013	200 168 784
2014	201 906 925
2015	203 624 771

3. Considere os dados da população brasileira acima. Estes dados se referem aos tamanhos da população no dia 01/01 as 0 : 00 hs de cada ano.

   (a) Expresse os números de habitantes em milhões e utilize *interpolação quadrática inversa* com nós de interpolação apropriados para estimar a data em que o Brasil atingiu 200 milhões. (Dica: No primeiro lugar deve-se obter um valor no sistema decimal que deve ser convertido em uma data.) [2 pts]

   (b) Seja $q_2(200)$ o resultado do item (a) no sistema decimal. Estime o erro contido no resultado $q_2(2000)$ usando o fato que na interpolação inversa por um poliômio de grau $\leq n$, tem-se que um limitante superior para $|E_n(y)|$ é aproximadamente dado por

$$\prod_{k=0}^{n} |y - y_k| \begin{pmatrix} \text{máximo do valor absoluto das} \\ \text{diferenças divididas de ordem } n+1 \end{pmatrix}$$

   Dica: No primeiro lugar, utilize valores no sistema decimal. A partir daí, determine um intervalo $[q_2(200) - E_2(200), q_2(200) + E_2(200)]$ no sistema decimal. Depois convirta este intervalo em um intervalo de datas. [1 pt]

3.(a)

Ordem

Y	0	1	2	3
194,8076	2010			
		0.5513		
196,6215	2011		0.0025	
		0.5604 (f_1)		-0.0001
198,4058	2012		0.0019	
		0.5672 (f_2)		0.0001
200,1688	2013		0.0023 (f_3)	
		0.5753		0.0001
201,9069	2014		0.0020	
		0.5821		
203,6248	2015			

Foram escolhidos os nós (198,4058, 2012) (200,1688, 2013) (201,9069, 2014) porque 198,4058, 200,1688, 201,9069 são os ~~valor~~ 3 valores mais próximos a 200

1/4

(a) $q_2(y) = 2012 + 0.5672 \cdot (y - 198,4058) + 0.0023(y - 198,4058)(y - 200,1688)$

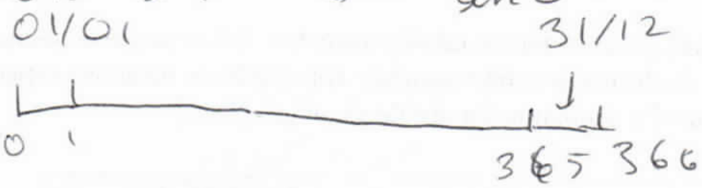
$q_2(200) = 2012.9036$

1/4

2012 foi um ano bissexto

$0.9036 \cdot 366 = 330.7176$ $\frac{1}{4}$

o dia 331 do ano



qualquer valor entre no intervalo $[330, 331)$

corresponde ao dia 331 do ano

$[365, 366) \triangleq 31/12$ 366º dia

$[335, 336) \triangleq 01/12$ 336º dia

$[334, 335) \triangleq 30/11$ 335º dia

$[330, 331) \triangleq \underline{\underline{26/11}}$ 331º dia

Quem assumiu que 2012 tem 365 dias obteve

$0.9036 \cdot 365 = 329.8140$ $\frac{1}{4}$

$\rightsquigarrow$ 25/11

(b) $|E_2(200)|$ é aproximadamente limitado por cima por

$|(200-198{,}4058)\cdot(200-200{,}1688)(200-201{,}9069)|$ · max do valor absoluto das diferenças divididas de ordem 3

$\frac{1}{2}$

$= 0.5131 \cdot 10^{-4}$

Portanto, podemos estimar que o valor verdadeiro de q_2 é em $[330.7171, 330.7181]$ $\frac{1}{4}$

$\rightsquigarrow$ intervalo de data $[26/11, 26/11]$

o que não tem influência na data que obtemos

$\frac{1}{4}$

4. Considere

$$\int_0^1 f(x)dx,$$

em que $f(x) = e^{-4x^2}$.

(a) Utilize a Regra 1/3 de Simpson Repetida com *2 subintervalos de interpolação* para obter um valor aproximado desta integral. Lembre-se que a regra 1/3 de Simpson repetida com $n+1$ nós de interpolação $(x_k, y_k) = (x_k, f(x_k)$ para $k = 0, \dots, n$ fornece $S_n(f) =$

$$\frac{h}{3}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big).$$

[0.5 pts]

(b) Utilize a Quadratura Gaussiana com $n = 1$ para aproximar o valor de $\int_0^1 f(x)dx$. Lembre-se que a fórmula é dada por

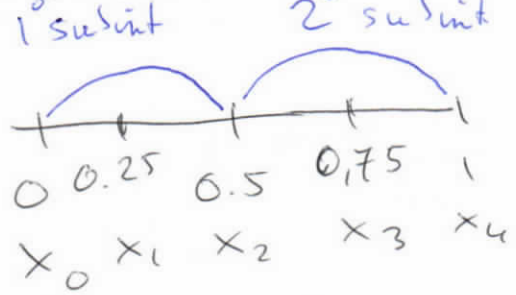
$$G_1(f) = \frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{1}{2}\Big(a+b-\frac{b-a}{\sqrt{3}}\Big)\right) + f\left(\frac{1}{2}\Big(a+b+\frac{b-a}{\sqrt{3}}\Big)\right)\right].$$

[0.5 pts]

(c) Interprete gráficamente o que acontece no item (c). Este desenho deve incluir os nós de interpolação utilizados. Qual é a área utilizada para estimar o valor de $\int_0^1 f(x)dx$? [0.5 pts]

(a) Com 2 subintervalos de interpolação

temos



$n = 4$

$\Rightarrow h = \frac{1-0}{4} = 0.25$

Portanto, temos $\int_0^1 f(x)dx \simeq S_4(f)$

$= \frac{1}{12}(f(0) + 4f(0.25) + 2f(0.5) + 4f(0,75) + f(1))$

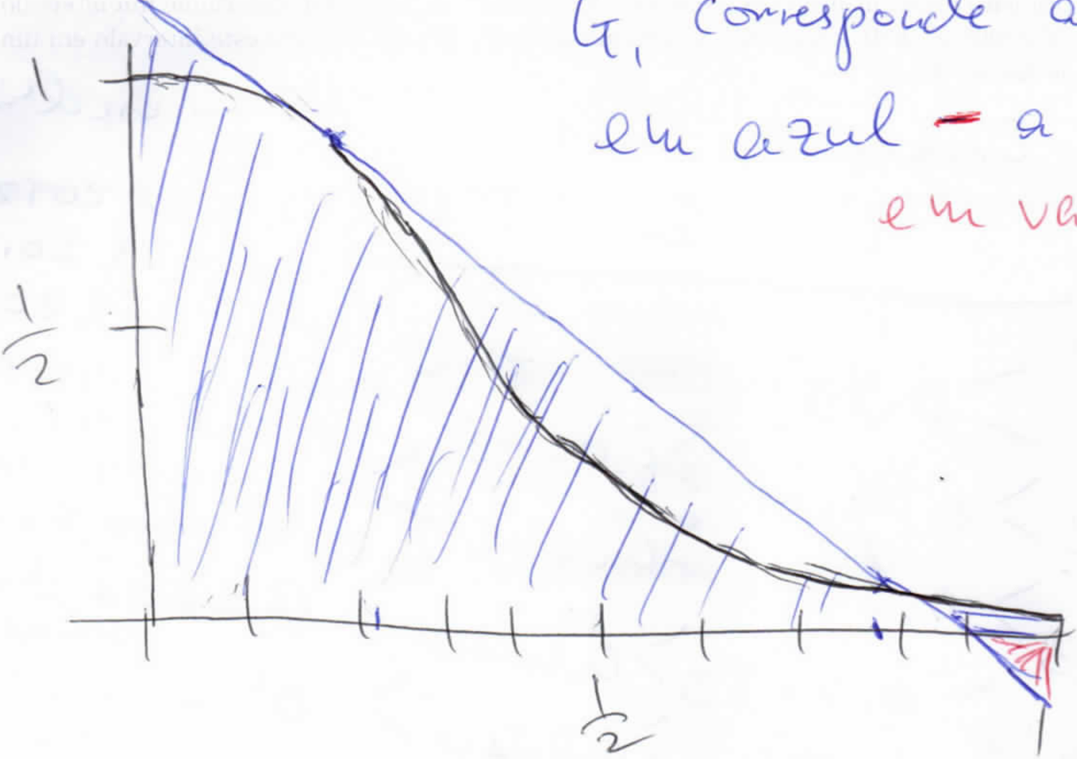
$= \frac{1}{12}(1 + 4\cdot 0.7788 + 2\cdot 0.3679 + 4\cdot 0.1054 + 0.0183)$

$= 0.4409$

(b) $G_1(f) = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) + f\left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[0.83641 + 0.0831\right] = 0.4598$

G, corresponde à área em azul – a área em vermelho



G_1 corresponde à área em azul − a área em vermelho