1a. Lista de Exercícios

MM456 Equações Diferenciais Ordinárias.
março de 2012

1. Se T é uma matriz $n \times n$ inversível, mostre que
$$\|T^{-1}\| \geq \frac{1}{\|T\|}.$$

2. Se T é é uma matriz $n \times n$ com $\|I - T\| < 1$, mostre que T é inversível e que a série
$$\sum_{k=0}^{\infty} (I - T)^k$$
converge absolutamente para T^{-1}.

3. Em cada caso abaixo, dê um exemplo de uma matriz de coeficientes A tal que o sistema linear $x' = Ax$ tenha uma solução $x(t)$ tal que: a) $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ e $\lim_{t\to-\infty} \|x(t)\| = \infty$; b) para cada solução não nula existem constantes $m < M$ tais que $m \leq x(t) \leq M$; c) $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = \infty$ e $\lim_{t\to-\infty} \|x(t)\| = \infty$; d) $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = \infty$ e $\lim_{t\to-\infty} x(t)$ não existe.

4. Verifique se existe uma equação diferencial linear $x' = A(t)x$ em $\mathbf{R}^2$, com $A(t)$ constante por partes que, de $t = 0$ até $t = 2$, leva simultaneamente: o ponto $(1, 3)$ em $(-2, -6)$ e o ponto $(3, -1)$ em $(-3, 1)$. Faça o mesmo para os pares de pontos: de $(1, 3)$ em $(3, -1)$ e $(3, -1)$ em $(1, 3)$.

   $A(t)$ precisa ser contínua para garantir a existência e unicidade de solução?

5. a) Seja $\varphi(t)$ uma família de matrizes não-singulares cujas entradas tem derivada contínua em todo $t \in \mathbb{R}$. Prove que existe uma única matriz $A(t)$ contínua tal que $\varphi(t)$ é a solução fundamental da equação linear $x' = A(t)x$. O determinante de $\varphi(t)$ precisa ser positivo?

   b) Use o item acima para mostrar que $e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)}$ se e somente se o colchete $[A, B] := AB - BA$ for zero.

6. Use o item (a) do exercício acima para mostrar que se $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$ então

$$e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)}\ e^{\frac{t^2}{2}[B,A]} = e^{t(A+B)+\frac{t^2}{2}[B,A]}.$$

7. Generalize o exercício acima e verifique os primeiros termos da fórmula de Baker-Hausdorff-Campbell, para um par A, B de matrizes $n \times n$:

$$e^A e^B = e^Z$$

com

$$Z = A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]-\frac{1}{12}[B,[A,B]]-\frac{1}{24}[B,[A,[A,B]]]+\dots$$

8. Dada a equação linear $x' = Ax$ em $\mathbf{R}^n$ com condição inicial $x(0) = x_0$, exiba a série de Taylor da curva $x(\cdot) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$. Verifique que esta série converge para todo t (uniformemente em cada compacto).

9. Se $A(t)$ é anti-simétrica para todo $t \in \mathbf{R}$, mostre que a solução fundamental da EDO linear $x' = A(t)x$ satisfaz $\Phi(t)^*\Phi(t) = C$ constante, onde $\Phi(t)^*$ é a transposta da matriz $\Phi(t)$. Em particular, se $\Phi(t)$ é ortogonal para algum $t \in \mathbf{R}$ então $\Phi(t)$ é ortogonal para todo $t \in \mathbf{R}$.

10. Prove que para uma matriz quadrada A: a) $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$; b) $\det e^A = e^{\mathrm{tr} A}$ onde $\mathrm{tr} A$ é o traço da matriz A.

11. Seja $\Phi(t)$ uma matriz $n \times n$ com entradas de classe C^1. Se $\Phi(0) = I$ e $\Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s)$ para todo $s, t \in \mathbf{R}$, prove que existe uma única matriz A tal que $\Phi(t) = e^{tA}$.

12. Seja A uma matriz (real ou complexa). a) Prove que

$$\lim_{n\to\infty}\left(I + \frac{A}{n}\right)^n = e^A.$$

b) Mostre que:

$$\frac{d}{dt}\det(I+tA)_{t=0} = \mathrm{tr} A.$$

13. Seja C uma matriz complexa com $\det C \neq 0$. Mostre que existe uma matriz complexa B tal que $e^B = C$.

14. Para toda matriz real D com $\det D \neq 0$ existe uma matriz real B tal que $e^B = D^2$.

15. Resolva os sistemas lineares e identifique os subespaços estáveis E^s, instável E^u e central E^c.

    a)
    $$x' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} x$$

    b)
    $$x' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

16. Resolva o sistema linear não homogêneo
    $$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$
    com condição inicial $x(0) = (1, 0)$.