1a. Prova

MM456 Equações Diferenciais Ordinárias.
04 de abril de 2012

Escolha 4 dentre as 5 questões abaixo.
Enuncie os resultados que mencionar. Boa prova!

1. Escolha um dos itens abaixo:

   (a) Encontre a solução no espaço de estados $(x(t), x'(t)) \in \mathbf{R}^2$ de $x'' + x' = g(t)$ com $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x'_0$ e g é uma função contínua em $\mathbf{R}$. Faça o retrato de fase quando $g \equiv 0$.

   (b) Calcule a solução de

   $$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix},$$

   com $x(0) = (0, 1)$.

2. Seja $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 e suponha que $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ seja a solução de $x' = f(t, x)$ com $x(t_0) = x_0$. Demonstre que é impossível ou dê um exemplo de uma f tal que existe $t_1 \neq t_0$ com $\varphi(t_1) = \varphi(t_0)$ porém $\varphi'(t_1)$ e $\varphi'(t_0)$ são linearmente independentes. Enuncie o teorema de Picard-Lindelöf e aponte se e como o exemplo contraria a unicidade da solução ou não. Responda as mesmas perguntas anteriores no caso autônomo $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.

3. Seja Ω um aberto em $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ e $f : \Omega \to \mathbf{R}^n$ contínua. Considere os subconjuntos $C \subset \Omega_0 \subset \Omega$ tais que a distância $d(C, \Omega \setminus \Omega_0) = d > 0$ e $\|f\| < M$ para algum $M > 0$ em Ω_0. Mostre que existe $\alpha > 0$ tal que para todo $(t_0, x_0) \in C$ existe uma solução de $x' = f(t, x)$ com $x(t_0) = x_0$ no intervalo $I_\alpha(t_0) = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

4. Seja $t \mapsto A(t) \in M(n, \mathbf{R})$ contínua. (a) Mostre que para cada base $\{v_1, \ldots, v_n\} \in \mathbf{R}^n$, existe uma única solução fundamental $\varphi(t)$ tal que $\varphi'(t) = A(t)\varphi(t)$ e $\varphi(0)$ tem colunas dadas pelos vetores $v_1, \ldots, v_n$. Conclua que existe uma única solução fundamental $\widetilde{\varphi}(t)$ tal que $\widetilde{\varphi}(0) = I$ e todas as outras soluções fundamentais são dadas por $\varphi(t) = \widetilde{\varphi}(t)C$, onde C é uma matriz inversível.

   b) Existe uma solução fundamental com $\varphi(0) = I$ e $\varphi(t + s) = \varphi(t)\varphi(s)$ se e somente se $\varphi(t) = e^{At}$.

5. Demonstre o Teorema de Peano. Seu argumento vale em dimensão infinita?