Soluções da Prova P1 EDO 2012

1) a) $\begin{cases} y_1(t) = x(t) \\ y_2(t) = x'(t) \end{cases}$ Então a EDO fica

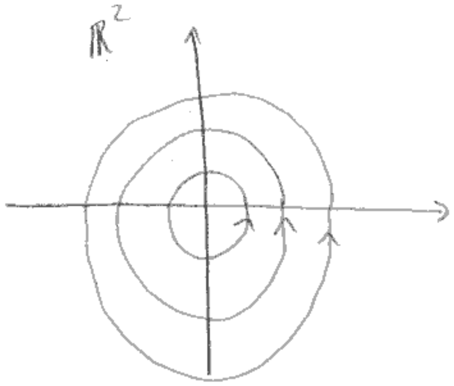
$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$$

Solução da homogênea associada $\varphi(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$.

Solução da não-homogênea se obtem pela fórmula de variação de parâmetros que diz:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} + e^{At} \int_0^t e^{-As} g(s)\, ds.$$

Retrato de fase da EDO linear homogênea associada:



1) b)

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} x + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{C.I} \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & \operatorname{senh} t \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$x(t) = e^{At}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{A(t-s)} \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} ds$$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{senh} t \\ e^{-t} \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} s\, e^{t-s} + \operatorname{senh}(t-s) \\ e^{-(t-s)} \end{pmatrix} ds$$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{senh} t \\ e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t & \operatorname{senh} t \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} s\, e^{-s} + \operatorname{senh}(-s) \\ e^{s} \end{pmatrix} ds$$

$$\int_0^t \underbrace{s}_{u} \underbrace{e^{-s}}_{v} ds = -s e^{-s}\Big|_0^t + \int_0^t e^{-s} ds = \left(-t e^{-t}\right) - (-0) + \left[-e^{-s}\right]_0^t$$

$$u = s \qquad u' = 1$$
$$v = -e^{-s} \qquad v' = e^{-s}$$

$$= -t e^{-t} - \left[e^{-t} - e^{0}\right]$$

$$= -t e^{-t} - e^{-t} + 1$$

$$\int_0^t -\operatorname{senh}(s)\, ds = -\left[\cosh t\right]_0^t = -\left[\cosh t - 1\right]$$

$\therefore$

$$x(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{senh} t \\ e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{t} & \operatorname{senh} t \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -te^{-t} - e^{-t} - \cosh t + 2 \\ e^{t} - 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cancel{\operatorname{senh} t} - t - 1 - e^{t}\cosh t + 2e^{t} + e^{t}\operatorname{senh} t - \cancel{\operatorname{senh} t} \\ \cancel{e^{-t}} + 1 - \cancel{e^{-t}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -t - 1 + 2e^{t} + e^{t}\left(\frac{\cancel{e^{t}} - e^{-t}}{2} - \frac{\cancel{e^{t}} + e^{-t}}{2}\right) \\ 1 \end{pmatrix}$$

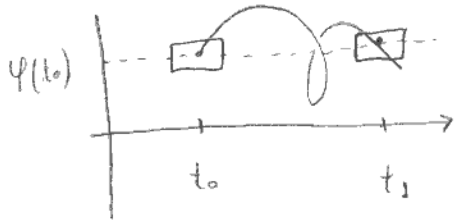
$$= \begin{pmatrix} -t - 1 + 2e^{t} - 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{t} - t - 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>Verificação:</u>

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 2e^{t} - 1 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^{t} - t - 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>De fato!</u> $LD = \begin{pmatrix} 2e^{t} - \cancel{t} - 2 + 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cancel{t} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{t} - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2)



Não contraria Picard-Lindelöf porque apesar de $\varphi(t_0) = \varphi(t_1)$, $(t_0, \varphi(t_0))$ e $(t_1, \varphi(t_0))$ são pontos distintos em $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ e cada um tem sua própria vizinhança $I_\alpha(t_0)\times B_b$ e $I_\alpha(t_1)\times B_b$ onde vale a unicidade de solução.

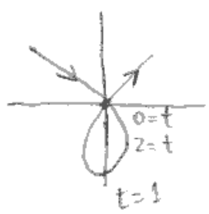
Exemplo: Considere qualquer curva $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ em $\mathbb{R}^2$ com $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$ com $\gamma'(t_0)$ e $\gamma'(t_1)$ l.i

Tome $f(t,x) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)) \in \mathbb{R}^2$.

Então as soluções de $x' = f(t,x) \in \mathbb{R}^2$ com C.I. $x(t_0) = x_0$ são dados por $x(t) = (x_0 - \gamma(t_0)) + \gamma(t)$

(O fluxo é um movimento rígido do plano)
∴ isometria.

Exemplo de curva: $t \longmapsto (t(t-1)(t-2),\ t(t-2))$



$\gamma(0) = \gamma(2) = 0$

$\gamma(1) = (0,-1)$

No caso autônomo essa situação não existe pois $f(\varphi(t_0)) = f(\varphi(t_1))$ ∎

3) Ver Corolário 8, Cap. 1 Sotomayor (pág 16).

Tome $\alpha = \min\left\{d, \frac{d}{M}\right\}$.

4) a) Para cada C.I. $x(0) = v_i$, o corolário da versão global do Teorema de Picard garante que existe uma única solução de $x' = A(t)x$, digamos φ_i com $\varphi_i(0) = v_i$. Tomando $\varphi(t) = \big(\varphi_1(t) \ \dots \ \varphi_n(t)\big)$, olhando coluna por coluna verificamos que $\varphi'(t) = A(t)\varphi(t)$.

O Teorema de Liouville garante que $\varphi(t) \in Gl(n,\mathbb{R})$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

Em particular, tomando $v_i = e_i$ elementos da base canônica de $\mathbb{R}^n$, então existe uma única solução fundamental $\tilde{\varphi}$ com $\tilde{\varphi}(0) = \mathrm{Id}$.

Se $\varphi(t)$ é uma solução fundamental com colunas de $\varphi(0)$ dadas por $v_1, \dots, v_n$ então $\tilde{\varphi}(0)\cdot\varphi(0)$ também é uma solução fundamental com essas mesmas condições iniciais. Por unicidade, temos que $\varphi(t) = \tilde{\varphi}(0)\cdot\underbrace{\varphi(0)}_{= C}$.

b) $(\Rightarrow)$ $A(t)\varphi(t) = \varphi'(t) = \lim\limits_{s\to 0} \dfrac{\varphi(t+s) - \varphi(t)}{s} = \left(\lim\limits_{s\to 0} \dfrac{\varphi(s) - \mathrm{Id}}{s}\right)\varphi(t) = A(0)\varphi(t)$

$\therefore$ $A(t) \equiv A(0) \Rightarrow \varphi(t) = e^{A(0)t}$.

$(\Leftarrow)$ Óbvio das propriedades de e^{At}

5) Demonstrado na teoria apresentado em aula.

O argumento apresentado não funcionaria em dimensão infinita porque não temos aproximação uniforme por funções contínuas e Lipschitz na 2ª coordenada.