2a. Lista de Exercícios

MM456 Equações Diferenciais Ordinárias.
abril de 2012

Hipóteses para os exercícios 1-6 abaixo: Considere uma sequência de funções contínuas $f_n : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ com $f_n \to f_0$ uniformemente nos compactos e tais que as soluções $\varphi(t, t_0, x_0)$ de $x' = f_n(t, x)$ para toda condição inicial $(t_0, x_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$ são únicas.

1. Dados $t_0 < t_1$, prove que os conjuntos $A_n = A_n(t_0, t_1)$ formados pelos pontos $x_0 \in \mathbf{R}^d$ tais que as soluções $\varphi(t, t_0, x_0)$ estão definidas em $t = t_1$ é um aberto.

2. Se o conjunto $A_0 \neq \emptyset$, então $A_n \neq \emptyset$ para n suficientemente grande.

3. Seja $T_n : A_n \to \mathbf{R}^d$ dado por $T(x_0) = \varphi(t_1, t_0, x_0)$. Mostre que T_n é um homeomorfismo de A_n sobre um aberto $B_n \subset \mathbf{R}^d$ que converge uniformemente para T_0 em compactos de A_0 (i.e. dado um compacto $K \in A_0$, existe $n(K)$ tal que se $n > n(K)$ então $K \subset A_n$ e $T_n|_K$ converge uniformemente para $T_0|_K$).

4. Suponha que para todo $n = 1, 2, \ldots$ as funções f_n sejam deriváveis em relação à segunda coordenada $x \in \mathbf{R}^d$ e que essas derivadas (jacobianas) sejam limitadas, digamos $|\frac{\partial f_n}{\partial x}| < M$. Mostre que $A_n = B_n = \mathbf{R}^d$.

5. Suponha que para $n = 0, 1, 2, \ldots$ as funções f_n sejam deriváveis em relação à segunda coordenada, que essas derivadas sejam contínuas e que $\frac{\partial f_n}{\partial x}$ converge uniformemente em compactos de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$ para $\frac{\partial f_0}{\partial x}$. Mostre que os T_n são difeomorfismos de classe C^1 tal que suas derivadas $\frac{\partial T_n}{\partial x}$ convergem uniformemente em compactos para $\frac{\partial T_0}{\partial x}$.

6. Estenda o resultado do exercício acima aumentando a regularidade: considerando que para cada t fixado, $f(t, x) \in C^r$ e que para todo inteiro $0 \leq l \leq r$, as derivadas $\frac{\partial^l f_n}{\partial x^l}$ convergem uniformemente em compactos para $\frac{\partial^l f_0}{\partial x^l}$, mostre que $\frac{\partial^l T_n}{\partial x^l}$ convergem uniformemente em compactos para $\frac{\partial^l T_0}{\partial x^l}$.

7. Mostramos (no livro e na aula) que se Λ for uma variedade diferenciável e $f : \Omega(\subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n) \times \Lambda \to \mathbf{R}^n$ é uma função contínua tal que para cada $\lambda \in \Lambda$ e cada condição inicial (t_0, x_0) existe uma única solução $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ da EDO $x' = f(t, x, \lambda)$ no seu intervalo maximal $(\omega_-(t_0, x_0, \lambda), \omega_+(t_0, x_0, \lambda))$, então o conjunto

$$D = \{(t, t_0, x_0, \lambda) : (t_0, x_0, \lambda) \in \Omega, t \in (\omega_-(t_0, x_0, \lambda), \omega_+(t_0, x_0, \lambda))$$

é aberto em $\mathbf{R} \times \Omega$ e $\varphi : D \to \mathbf{R}^n$ é contínua.

Demonstre o mesmo resultado quando Λ é um espaço topológico.

8. Considere $\varphi(t, t_0, x_0, x_0', \lambda)$ a solução da equação de segunda ordem:

$$x'' = f(t, x, x', \lambda)$$

com condições iniciais $x(t_0) = x_0$ e $x'(t_0) = x_0'$. Assumindo f de classe C^1, desenvolva as fórmulas da derivada da φ em relação a x, x' e a λ.

9. Seja f com derivada contínua no aberto Ω de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$. Mostre que a solução $\varphi(t, t_0, x_0)$ da EDO $x' = f(t, x)$ com condição inicial $x(t_0) = x_0$ tem derivada em relação a t_0 e que essa derivada $\frac{\partial \varphi}{\partial t_0}(t, t_0, x_0)$ é contínua no domínio D. Além disso $\frac{\partial \varphi}{\partial t_0}(t, t_0, x_0)$ satisfaz a seguinte EDO linear:

$$\frac{\partial}{\partial}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_0}(t, t_0, x_0)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, \varphi(t, t_0, x_0))\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_0}(t, t_0, x_0)\right)$$

com condição inicial $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_0}(t_0, t_0, x_0)\right) = -f(t_0, x_0)$.

10. Partindo de um campo de vetores dependendo do tempo $X : \mathbf{R} \times M \to TM$ em uma variedade diferenciável M, mostre o que é uma solução da EDO em M dada por $x' = X(t, x)$ com condição inicial $x(t_0) = x_0$. A solução depende da parametrização da variedade? Como definiríamos uma solução maximal passando pela condição inicial (t_0, x_0)?

11. Seja X um campo de vetores (autônomo) em uma variedade M. Mostre os passos principais na construção do fluxo φ_t, i.e., o grupo local a 1-parâmetro de difeomorfismos (soluções locais da EDO $x' = X(x)$).

12. Mostre que se M é uma variedade compacta então todo campo X é completo.

13. Seja X um campo de vetores (autônomo) em uma variedade M. Seja φ_t o grupo local a 1-parâmetro de difeomorfismos (soluções locais da EDO $x' = X(x)$). Mostre que um difeomorfismo $\Psi : M \to M$ comuta com φ_t para todo t no domínio se e somente se $\Psi_* X = X$ (i.e. $d_{\Psi^{-1}(p)}\Psi(X(\Psi^{-1}(p))) = X(p)$ para todo ponto $p \in M$).

14. Se φ_t é o fluxo associado a um campo X em M então $X \circ \varphi_t = d\varphi_t X$ (precisamente: $X(\varphi_t(p)) = d_p\varphi_t(X(p)) = \frac{\partial \varphi_t(p)}{\partial t}$).

15. Usando como definição de colchete de Lie entre dois campos de vetores X e Y em uma variedade diferenciável M que

$$[X, Y](p) := \frac{d(\varphi_t)_*^{-1}(Y)}{dt}(p),$$

mostre que $\varphi_s \psi_t = \psi_t \varphi_s$ para todo s, t nos domínios, onde φ_s e ψ_t são os fluxos associados aos campos X e Y respectivamente.