MA-111 Cálculo I- 3a Lista

Março 2011

1. Seja f uma função definida em $\mathbf{R}$ tal que para todo $x \neq 1$ temos que $-x^2 + 3x \leq f(x) < \frac{x^2-1}{x-1}$. Calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$ e justifique.

2. Suponha que para todo $x \in \mathbf{R}$ temos $|g(x)| \leq x^4$. Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x}$.

3. A afirmação

$$\text{“}\lim_{x\to p} |f(x)| = |L| \Rightarrow \lim_{x\to p} f(x) = L''$$

é verdadeira ou falsa? Justifique.

4. Dê um exemplo de uma função f tal que $\lim_{x\to p} |f(x)|$ existe mas $\lim_{x\to p} f(x)$ não existe.

5.

LIMITE E CONTINUIDADE / 113

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } 3x}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\text{sen } x}{x-\pi}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\text{sen } x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2}{\text{tg } x \text{ sen } x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg } 3x}{\text{sen } 4x}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$

i) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\text{sen } x}{2x-\pi}$

j) $\lim\limits_{x\to 0} x \text{ sen } \dfrac{1}{x}$

l) $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{\text{tg }(x-p)}{x^2-p^2}$, $p \neq 0$

m) $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{\text{sen }(x^2-p^2)}{x-p}$

n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen }\left(x^2+\frac{1}{x}\right) - \text{sen } \frac{1}{x}}{x}$

o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\text{sen } x}{x^2-\text{sen } x}$

p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\text{tg } x}{x+\text{tg } x}$

q) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\text{sen } \pi x}{x-1}$

Exercícios 4.1

1. Calcule.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^3}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[5 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right]$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[2 - \dfrac{1}{x}\right]$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + 1}{x + 3}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x + 1}{x + 3}$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 3}{3x^2 + x + 1}$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^4 - 2x + 1}{4x^4 + 3x + 2}$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2 + 3x + 1}$

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3 + 1}{x^4 + 2x + 3}$

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{5 + \dfrac{2}{x}}$

m) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{\dfrac{x}{x^2 + 3}}$

n) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{3x + 2}$

o) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 + 2x - 1}}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

p) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x^2 + 3}$

q) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{\sqrt{x}}$

r) $\lim\limits_{x \to +\infty} [x - \sqrt{x^2 + 1}]$

s) $\lim\limits_{x \to +\infty} [\sqrt{x + 1} - \sqrt{x + 3}]$

2. Sejam f e g definidas em $[a, +\infty[$ e tais que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ e $g(x) \neq 0$ para $x > a$. Calcule, caso exista, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3. a) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 3x - 1}{2x^3 - 6x + 1}$

b) Mostre que existe $r > 0$ tal que

$$x > r \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{x^3 + 3x - 1}{2x^3 - 6x + 1} < \frac{3}{4}$$

4. a) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 3}{x^3 + 2x - 1}$

b) Mostre que existe $r > 0$ tal que

$$x > r \Rightarrow 0 < \frac{x + 3}{x^3 + 2x - 1} < \frac{1}{2}.$$

6.

7.

126 / UM CURSO DE CÁLCULO

3. Calcule.

a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x} + 1}{x + 3}$ *b)* $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x + 3}}{2x - 1}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} [2x - \sqrt{x^2 + 3}\,]$ *d)* $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (x - \sqrt{3x^3 + 2}\,)$

e) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 3}\,)$ *f)* $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x + 3}\,)$

g) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - 1}\,)$ *h)* $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (x - \sqrt[3]{2 + 3x^3}\,)$

4. Calcule.

a) $\displaystyle\lim_{x \to 3^+} \frac{5}{3 - x}$ *b)* $\displaystyle\lim_{x \to 3^-} \frac{4}{x - 3}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{4}{2x - 1}$ *d)* $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$

e) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{2x + 1}{x}$ *f)* $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{x - 3}{x^2}$

g) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{3}{x^2 - x}$ *h)* $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{3}{x^2 - x}$

i) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{3x + 1}{4x^2 - 1}$ *j)* $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{2x + 3}{x^2 - 1}$

l) $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{2x + 3}{x^2 - 1}$ *m)* $\displaystyle\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 6x + 9}$

n) $\displaystyle\lim_{x \to -1^+} \frac{2x + 1}{x^2 + x}$ *o)* $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{2x + 1}{x^2 + x}$

p) $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{3x - 5}{x^2 + 3x - 4}$ *q)* $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}$

r) $\displaystyle\lim_{x \to -1^+} \frac{3x^2 - 4}{1 - x^2}$ *s)* $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x^3 - x^2}$

8. Dê exemplos de funções f e g tais que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, e com $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - g(x)) = L$ com os seguintes valores de L: $-\infty$, -3, 0, 3, $+\infty$.

9. Dê exemplos de funções f e g tais que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) =$

$+\infty$, e com $\lim_{x\to+\infty} f(x)/g(x) = L$ com os seguintes valores de L: $-\infty$, -3, 0, 3, $+\infty$.

10. Repetir as duas questões acima, mas com $x \to a^+$, onde $a \in \mathbf{R}$ a sua escolha.

11. Se $f(x) = x^5 + x + 14$, como podemos justificar que esse polinômio tem pelo menos uma raiz real no intervalo $[-2, -1]$?

12. Prove que a equação $x^3 - \frac{1}{1+x^4} = 0$ admite ao menos uma raiz real

13. Seja f contínua em $[a, b]$ e tal que $f(a) < f(b)$. Sabendo que f é injetora, conclua que f é estritamente crescente neste intervalo.

14. Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ contínua. Verifique que a imagem $Im(f)$ da f é um intervalo fechado. Isto é, existem números reais $m \leq M$ tais que a $Im(f) = [m, M]$.

15.

c) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$ *d*) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x+1}$

e) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x$ *f*) $\displaystyle\lim_{x \to 0} (1 + 2x)^x$

g) $\displaystyle\lim_{x \to 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$ *h*) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$

2. Seja $a > 0$, $a \neq 1$. Mostre que

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a.$$

3. Calcule.

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$ *b*) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{5^x - 1}{x}$ *d*) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{3^x - 1}{x^2}$