

## 1ª Lista de Exercícios de MM-720

### Análise no $\mathbb{R}^n$ Março/2023

1. Seja  $E \subset \mathbb{R}^n$  um subespaço vetorial de dimensão  $m$ . Prove que existem  $n - m$  funcionais lineares  $f_1, f_2, \dots, f_{(n-m)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $E = \{x \in \mathbb{R}^n : f_1(x) = \dots = f_{(n-m)}(x) = 0\}$ . Conclua que existe uma aplicação linear sobrejetiva  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{(n-m)}$  tal que  $E = \ker A$ .
2. Existe em  $\mathbb{R}^3$  um produto interno tal que  $\langle e_1, e_1 \rangle = 2, \langle e_2, e_2 \rangle = 3, \langle e_3, e_3 \rangle = 4, \langle e_1, e_2 \rangle = 0$  e  $\langle e_2, e_3 \rangle = \langle e_1, e_3 \rangle = 1$ . Ache uma base ortonormal para esse produto interno.
3. O fecho de todo conjunto é um conjunto fechado.
4.  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua se e somente se, para todo  $Y \subset X$  tem-se que  $f(X \cap \overline{Y}) \subset \overline{f(Y)}$ .
5. Sejam  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínuas no ponto  $a \in X$ . Se  $f(a) \neq g(a)$  então existe uma bola  $B_r(a)$  tal que  $x, y \in B_r(a)$  implica que  $f(x) \neq g(x)$ .
6. Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  contínua em  $a \in X \subset \mathbb{R}^n$ . Se  $f(a) > 0$  então existe  $\delta > 0$  tal que se  $|x - a| < \delta, x \in X$  então  $f(x) > 0$ .
7. Estabeleça um homeomorfismo entre o cone

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z \geq 0, x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$

e o plano  $\mathbb{R}^2$ .

8. Estabeleça um homeomorfismo entre  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  e  $S^n \times \mathbb{R}$ .
9. O quadrante  $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0\}$  é homeomorfo ao semi-plano superior  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0\}$ .
10. Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \frac{(x^2 - y)y}{x^4}$$

se  $0 < y < x^2$  e  $f(x, y) = 0$  nos demais pontos. Prove que o limite de  $f(x, y)$  é zero quando  $(x, y)$  tende a  $(0, 0)$  ao longo de qualquer reta que passe pela origem, mas não se tem que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0.$$

---

Os próximos exercícios se referem ao livro do Spivak “Calculus on Manifolds”. Alguns são fáceis, mas todos devem ser resolvidos!

1. 1-2 a 1-13.
2. 1-15 a 1-19, 1-21 e 1-22.
3. 1-26, 1-28.